



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο: ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	89
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο: ΠΡΟΟΔΟΙ	109
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	131



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Ιδιότητες:

α. $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1.$

β. $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = \frac{0}{N(\Omega)} = 0.$

γ. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει: $0 \leq P(A) \leq 1.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Προφανώς $0 \leq N(A) \leq N(\Omega)$ και άρα:

$$0 \leq N(A) \leq N(\Omega) \Leftrightarrow \frac{0}{N(\Omega)} \leq \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ:

Έστω A και B δυο ενδεχόμενα του δ.χ. Ω ενός πειράματος τύχης. Τότε ισχύουν οι επόμενοι κανόνες:

α. Απλός Προσθετικός Νόμος:

Αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

β. Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει ότι: $P(A') = 1 - P(A).$

Ισοδύναμα ισχύει και: $P(A) + P(A') = 1$ και $P(A) = 1 - P(A').$

γ. Προσθετικός Νόμος:

Αν A και B ενδεχόμενα του δ.χ. Ω ενός πειράματος τύχης τότε γενικά:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε : $P(A) \leq P(B).$

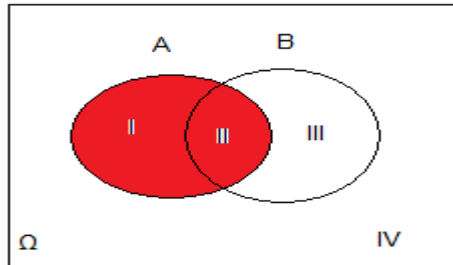
ε. Αν A και B ενδεχόμενα του δ.χ. Ω ενός πειράματος τύχης τότε γενικά:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ και ομοίως } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Έκφραση 1:

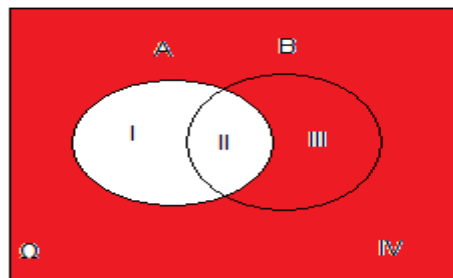
“Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A)$.

Έκφραση 2:

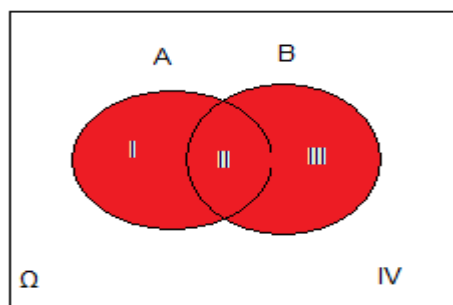
“Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A')$.

Έκφραση 3:

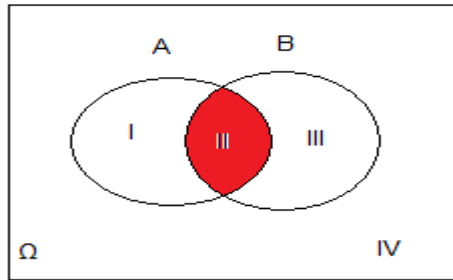
“Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B” ή
“Πραγματοποιείται το A ή το B” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A \cup B)$.

Έκφραση 4:

“Πραγματοποιούνται και το A και το B” ή
“Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B” :

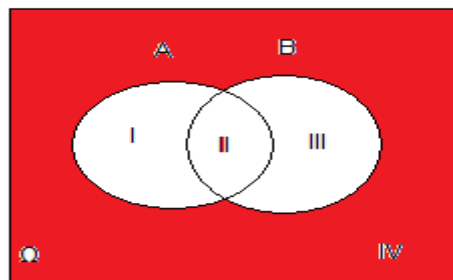


Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$.

Έκφραση 5:

“Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B” ή

“Δεν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B” :

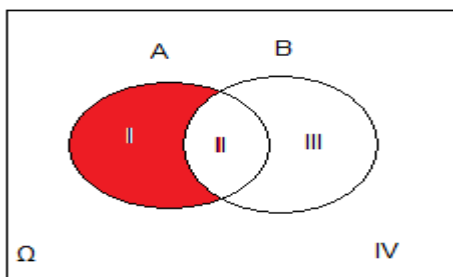


Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A \cup B)'$ ή την $P(A' \cap B')$.

Έκφραση 6:

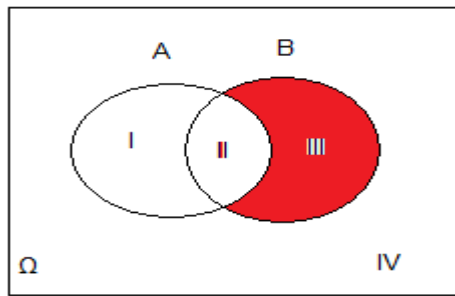
“Πραγματοποιείται μόνο το A” ή

“Πραγματοποιείται το A και όχι το B” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A - B)$ ή την $P(A \cap B')$.

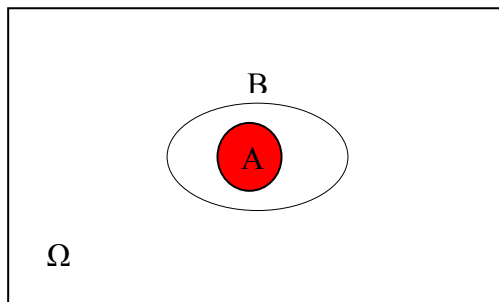
Ομοίως και “Πραγματοποιείται μόνο το B” ή “Πραγματοποιείται μόνο το B και όχι το A” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(B-A)$ ή την $P(B \cap A^c)$.

Έκφραση 7:

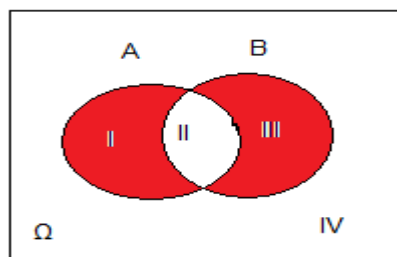
“Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B” ή
 “Όταν πραγματοποιείται το A πραγματοποιείται και το B” :



Τότε $A \subseteq B$ άρα και $P(A) \leq P(B)$.

Έκφραση 8:

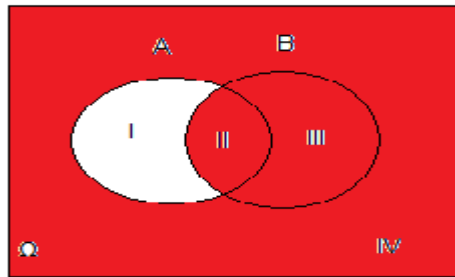
“Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A και B” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P[(A-B) \cup (B-A)]$.

Έκφραση 9:

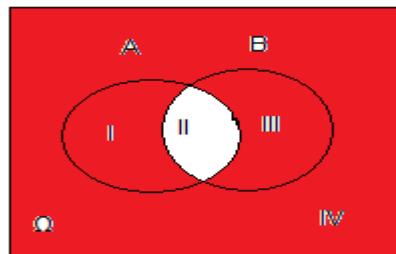
“Δεν πραγματοποιείται το A ή πραγματοποιείται το B” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A' \cup B)$.

Έκφραση 10:

“Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B” :



Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A \cap B)'$ ή την $P(A' \cup B')$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

A' ΟΜΑΔΑ:

1. Από μια τράπουλα με 52 φύλλα επιλέγουμε ένα στην τύχη. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
 - α. το φύλλο είναι κούπα.
 - β. το φύλλο δεν είναι κούπα.
2. Σε μια φρουτιέρα βρίσκονται 4 μήλα, 2 πορτοκάλια, 3 αχλάδια και 5 μανταρίνια. Επιλέγουμε τυχαία ένα φρούτο. Να βρεθούν οι επόμενες πιθανότητες :
 - α. Το φρούτο είναι μανταρίνι.
 - β. Το φρούτο είναι πορτοκάλι ή μανταρίνι.
 - γ. Το φρούτο δεν είναι ούτε αχλάδι ούτε μήλο.
3. Σε μια έρευνα που έγινε ρωτήθηκαν 50 οικογένειες πόσα παιδιά έχουν και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Αριθμός οικογενειών	5	12	18	7	4	3
Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4	5
	6					

Να βρεθεί η πιθανότητα αν επιλέξουμε μια οικογένεια στην τύχη να έχει:

α. το πολύ 2 παιδιά.

β. περισσότερα από 4 παιδιά.

4. Έστω τα σύνολα: $\Omega = \{ \omega \in \mathbb{N} / 1 \leq \omega \leq 15 \}$, $A = \{ \omega \in \Omega / \omega \text{ τέλειο τετράγωνο} \}$,

$B = \{ \omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 2 \}$ και $\Gamma = \{ \omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 5 \}$.

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω να βρεθούν οι πιθανότητες :

α. Να ανήκει στο A.

β. Να ανήκει και στο A και στο Γ.

γ. Να ανήκει και στο B και στο Γ.

δ. Να ανήκει στο Γ και όχι στο B.

ε. Να μην ανήκει στο A.

B' ΟΜΑΔΑ:

1. Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω ισχύουν:

$$P(A \cap B) = 0,1 \text{ και } \frac{P(A)}{2} = \frac{P(B)}{3} = \frac{P(A \cup B)}{4} \text{ να βρεθούν οι } P(A), P(B) \text{ και } P(A \cup B).$$

2. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω ισχύουν:

$$P(A') = \frac{4}{15}, P(B') = \frac{8}{15} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{4}{5}. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα } P(A \cap B).$$

3. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω ισχύουν:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ και } P(A') = \frac{1}{2}. \text{ Να βρεθούν οι πιθανότητες } P(B) \text{ και } P(A \cap B').$$

4. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω ισχύουν:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{9}{10} \text{ και } P(A) = 2P(B'). \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα } P(B).$$

5. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δ.χ. Ω δίνεται ότι:

$$P(A') = \frac{1}{3}, P(B') = \frac{1}{4} \text{ και } P(A \cap B) = 0,5. \text{ Να βρείτε την πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα A και B.}$$

6. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. Ω ισχύουν:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{8} \text{ και } P(A') = 3P(B'). \text{ Να βρεθούν οι } P(A) \text{ και } P(B).$$

7. Αν τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. είναι ασυμβίβαστα και επίσης ισχύει ότι:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{5} \text{ και } P(A \cup B) = 0,8. \text{ Να βρεθούν οι πιθανότητες } P(A) \text{ και } P(B).$$

8. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. ισχύει $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(B')$.

9. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. ισχύει $P(B)=1-2P(A)$, $5P(A \cup B)=3$ και $2+10 P(A \cap B)=3$. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.
10. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. ισχύει: $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$ και $P(A \cup B)=0,7$.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:
α. Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B.
β. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
γ. Να πραγματοποιηθεί μόνο το B.
δ. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.
11. Ένας μαθητής λύνοντας μια άσκηση πιθανοτήτων, βρήκε $P(A)=0,6$, $P(B)=0,8$ και $P(A \cap B)=0,3$. Να αποδείξετε ότι έχει κάνει λάθος.
12. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. ισχύει $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$.
Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A \cup B')$, $P(A' \cup B)$ και $P(A' \cap B)$.
13. Όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα. Για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι $P(A-B)=P(B-A)=0,5$. Να αποδείξετε ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
14. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δ.χ. ισχύει $3P(A \cup B)=1+3 P(A-B)$. Να βρεθεί η $P(B')$.

Γ' ΟΜΑΔΑ:

1. Σε ένα σχολείο 150 μαθητές ρωτήθηκαν κατά πόσο ασχολούνται με κάποιο από τα δυο σπορ: μπάσκετ και ποδόσφαιρο. Η έρευνα έδειξε ότι 120 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, 105 με το μπάσκετ και 80 και με τα δυο σπορ. Να βρεθεί η πιθανότητα αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να ασχολείται τουλάχιστον με ένα από τα δυο σπορ.
2. Μια έρευνα με σκοπό να δείξει τις προτιμήσεις των αυτοκινητιστών όσον αφορά τα αξεσουάρ του αυτοκινήτου, έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα: 80% θέλουν το αυτοκίνητό τους να έχει στερεοφωνικό, 30% θέλουν κλιματισμό και 15% και τα δυο. Διαλέγουμε τυχαία ένα άτομο που πήρε μέρος στην έρευνα. Ποια είναι η πιθανότητα:
α. Να μην θέλει στερεοφωνικό.
β. Να θέλει το λιγότερο ένα από τα δυο αξεσουάρ (στερεοφωνικό, κλιματισμό).
3. Δίνεται ένα πρόβλημα σε δυο μαθητές A και B. Η πιθανότητα να το λύσει ο A είναι 15%, ενώ η πιθανότητα να το λύσει ο B είναι 20%. Η πιθανότητα να το λύσουν και οι δυο είναι 10%. Να βρεθεί η πιθανότητα:
α. Να το λύσει ένας τουλάχιστον από τους δυο. β. Να το λύσει μόνο ένας από τους δυο.

4. Σε μια τάξη 30 μαθητών οι 20 δεν συμπαθούν τα μαθηματικά, οι 14 δεν συμπαθούν τα αρχαία και 5 δεν συμπαθούν κανένα από τα δυο. Αν τυχαία επιλεγεί ένας μαθητής, ποια η πιθανότητα να συμπαθεί και τα δυο μαθήματα;
5. Από 100 μαθήτριες της Β΄ Γυμνασίου ενός σχολείου οι 28 συμμετέχουν στην ομάδα μπάσκετ, οι 36 στην ομάδα βόλεϋ ενώ οι 23 συμμετέχουν μόνο στην ομάδα βόλεϋ. Αν επιλέξουμε τυχαία μια μαθήτρια, να βρεθούν οι πιθανότητες να συμμετέχει:
- α.** και στις δυο ομάδες. **β.** τουλάχιστον σε μια από τις δυο ομάδες.
γ. μόνο στην ομάδα μπάσκετ. **δ.** να μην συμμετέχει σε καμία από τις δυο ομάδες.
ε. μόνο σε μια από τις δυο ομάδες. **ζ.** το πολύ σε μια από τις δυο ομάδες.
6. Ένα λύκειο στη επαρχία έχει 50 μαθητές από τους οποίους 20 είναι στην Α΄ τάξη. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του λυκείου, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Β΄ τάξης είναι 34%. Να βρείτε:
- α.** την πιθανότητα ο μαθητής να είναι της Α΄ τάξης. **β.** πόσους μαθητές έχει η Γ΄ τάξη.
γ. την πιθανότητα ο μαθητής να είναι της Γ΄ τάξης.
7. Η Α΄ τάξη ενός λυκείου έχει 50 αγόρια και κορίτσια. Το 20% των αγοριών και τα $\frac{2}{5}$ των κοριτσιών επέλεξαν την ομάδα του βόλεϋ. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Αν η πιθανότητα να είναι αγόρι και να μην επέλεξε το βόλεϋ είναι 40%, να βρείτε:
- α.** πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια. **β.** την πιθανότητα να είναι κορίτσι που δεν επέλεξε βόλεϋ.

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΘΕΜΑ 2^ο

(2_497)

ΘΕΜΑ 2

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

A : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

B : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

(Μονάδες 15)

(2_499)

ΘΕΜΑ 2

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

A: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

B: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)