



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο -ΚΡΟΥΣΕΙΣ-ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ	1
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	8
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER.....	26
ΑΣΚΗΣΕΙΣ DOPPLER.....	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο -ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.....	
ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ	36
ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	52
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ.....	54
ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ	57
ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ-ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	63
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο -ΚΥΜΑΤΑ.....	112
ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ	118
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ.....	122
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	127
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ^ο -ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ	
ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ	163
ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ.....	165
ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOLLI- ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	166
ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ.....	168
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	170
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ^ο -ΣΤΕΡΕΑ.....	
ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ	194
ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ	201
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ	203
ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ.....	206
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	208
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ.....	209
ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ.....	211
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Μ.Κ.Ε).....	213
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	215
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ.....	254
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	350

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο ΚΡΟΥΣΕΙΣ-ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

Κρούση ονομάζουμε την σύγκρουση δύο σωμάτων η οποία έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

1. Διαρκεί πολύ λίγο και ολοκληρώνεται στον ίδιο χώρο.
2. Αναπτύσσονται πολύ ισχυρές εσωτερικές δυνάμεις οι οποίες είναι ζεύγη δράσης – αντίδρασης.
3. Η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν, και έτσι δεν συμβάλλουν στην αλλαγή της κινητικής κατάστασης του συστήματος. Αλλάζει η κινητική κατάσταση κάθε σώματος χωριστά.
4. Οι εξωτερικές δυνάμεις αν υπάρχουν είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις εσωτερικές και έτσι αγνοούνται. (μονωμένο σύστημα)

♦ Στον μικρόκοσμο:

Στον μικρόκοσμο τα στοιχειώδη σωματίδια μπορεί να μην έρθουν σε επαφή αλλά να πλησιάσουν πολύ κοντά και έτσι αναπτύσσονται ισχυρές εσωτερικές δυνάμεις. Αλλάζει η κινητική κατάσταση των σωμάτων. Την κρούση στον μικρόκοσμο την ονομάζουμε σκέδαση.

♦ Ορμή p

Υπολογίζεται από την σχέση $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ και είναι διανυσματικό μέγεθος. Έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με την ταχύτητα.
Μονάδα μέτρησης: 1 kgm/s.

Αρχή Διατήρησης Ορμής (Α.Δ.Ο)

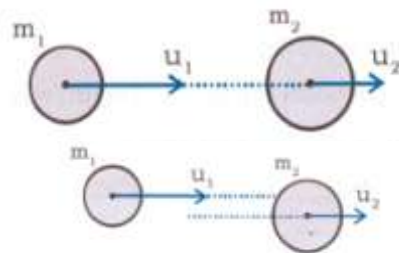
Η Α.Δ.Ο ισχύει αν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα ή αν ασκούνται η συνισταμένη τους είναι μηδέν. Οι εσωτερικές δυνάμεις επειδή είναι ζεύγη δράσης – αντίδρασης δεν επηρεάζουν το σύστημα.

$$p_{ολ.αρχ} = p_{ολ.τελ}$$

ΕΙΔΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Α) Κεντρική. Τα διανύσματα των ταχυτήτων των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα μάζας τους.

Β) Έκκεντρη. Τα διανύσματα των ταχυτήτων των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλα χωρίς να ανήκουν στην ίδια ευθεία.



Γ) **Πλάγια.** Τα διανύσματα των ταχυτήτων των σωμάτων που συγκρούονται έχουν τυχαίες διευθύνσεις και σχηματίζουν γωνία.



ΕΙΔΗ ΚΡΟΥΣΕΩΝ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Επειδή η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή θεωρούμε ότι η θέση των σωμάτων δεν αλλάζει, άρα και η δυναμική ενέργεια δεν μεταβάλλεται. Άρα οποιαδήποτε μεταβολή στην μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται οφείλεται σε μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης.

A) Ελαστική. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή. ($K_{αρχ} = K_{τελ}$)

B) Ανελαστική. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται δεν παραμένει σταθερή. Ένα μέρος της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. ($E_{απ} = K_{αρχ} - K_{τελ}$)

Κατηγορία των ανελαστικών κρούσεων είναι η **πλαστική κρούση** κατά την οποία γίνεται συγκόλληση των σωμάτων και έτσι δημιουργείται συσσωμάτωμα.

ΜΕΛΕΤΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ

A) Κεντρική ελαστική κρούση



Δύο σφαίρες m_1 και m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Θα εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο και την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας.

Α.Δ.Ο

$$p_{ολ,αρχ} = p_{ολ,τελ} \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \Rightarrow m_1 (u_1 - u'_1) = m_2 (u_2 - u'_2) \quad (1)$$

Α. Δ . Κινητ. Ενέργειας

$$K_{τελ} = K_{αρχ} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 \Rightarrow$$

$$m_1 (u_1^2 - u'^2_1) = m_2 (u_2^2 - u'^2_2) \Rightarrow m_1 (u_1 - u'_1) (u_1 + u'_1) = m_2 (u_2 - u'_2) (u_2 + u'_2) \quad (2)$$

$$\text{Διαιρώ την 1 και 2 κατά μέλη: } \frac{m_1 (u_1 - u'_1) (u_1 + u'_1)}{m_1 (u_1 - u'_1)} = \frac{m_2 (u_2 - u'_2) (u_2 + u'_2)}{m_2 (u_2 - u'_2)} \quad (2)$$

και προκύπτει:

$$u_1 + u'_1 = u_2 + u'_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = -(u'_1 - u'_2) \quad (3) \Rightarrow u'_2 = u_1 + u'_1 - u_2 \quad (4)$$

Με την βοήθεια της Α.Δ.Ο:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \xrightarrow{4} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u_1 + m_2 u'_1 - m_2 u_2 \Rightarrow 2$$

$$m_2 u_2 + (m_1 - m_2) u_1 = (m_1 + m_2) u'_1 \Rightarrow u'_1 = \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Από (4) και (5): $u'_2 = u_1 + u'_1 - u_2 \Rightarrow u'_2 = u_1 + \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2} - u_2 \Rightarrow$

$$u'_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_1 - m_1 u_2 - m_2 u_2 + 2 m_2 u_2 + m_1 u_1 - m_2 u_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow u'_2 = \frac{(m_2 - m_1) u_2 + 2 m_1 u_1}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

- Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι στη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων, οι διαφορές των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι αντίθετες.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

1. Αν το m_2 είναι αρχικά ακίνητο ($u_2 = 0$)

Οι σχέσεις 5 και 6 θα γίνουν: $u'_1 = \frac{(m_1 - m_2) u_1}{m_1 + m_2}$ $u'_2 = \frac{2 m_1 u_1}{m_1 + m_2}$

α) Αν $m_1 > m_2 \Rightarrow m_1 - m_2 > 0$ άρα $u'_1 > 0$ δηλαδή το σώμα 1 συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά.



β) Αν $m_1 = m_2 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0$ άρα $u'_1 = 0$ και $u'_2 = u_1$. Δηλαδή το σώμα 2 αποκτά την ταχύτητα του πρώτου πριν την κρούση.



γ) Αν $m_1 < m_2 \Rightarrow m_1 - m_2 < 0$ άρα $u'_1 < 0$. Το σώμα 1 αλλάζει τη φορά της κίνησης του.



δ) Αν το $m_1 \ll m_2$

$$m_1 \ll m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \approx 0 \quad u_1' = \frac{(m_1 - m_2)u_1}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} u_1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1' = -u_1} \quad u_2' = \frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} \Rightarrow \boxed{u_2' = 0}$$

Το σώμα 1 αντιστρέφει την ταχύτητα του ενώ το σώμα 2 παραμένει ακίνητο.

$$\epsilon) \text{ Αν το } m_1 \gg m_2 \Rightarrow u_1' = \frac{(m_1 - m_2)u_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_1' = \frac{m_1(1 - \frac{m_2}{m_1})}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} \Rightarrow \boxed{u_1' = u_1}$$

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \approx 0 \quad u_2' = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_2' = \frac{2m_1 u_1}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} \Rightarrow \boxed{u_2' = 2u_1}$$

2. Αν το $m_2 = m_1$

$$(5) \quad u_1' = \frac{(0)u_1 + 2m_2 u_2}{2m_2} \Rightarrow \boxed{u_1' = u_2} \quad (6) \quad u_2' = \frac{(0)u_2 + 2m_1 u_1}{2m_1} \Rightarrow \boxed{u_2' = u_1}$$

Βλέπουμε πως τα σώματα με **ίσες** μάζες ανταλλάσσουν ταχύτητες μετά την κρούση.

ΠΡΟΣΚΡΟΥΣΗ ΣΕ ΤΟΙΧΟ

Κάθετη πρόσκρουση

Ο τοίχος έχει θεωρητικά άπειρη μάζα, έτσι αν ένα σώμα πέσει πάνω του και η κρούση είναι ελαστική, θα ανακλαστεί με ταχύτητα ίσου μέτρου και ο τοίχος φυσικά θα παραμείνει ακίνητος. Ας το αποδείξουμε και με σχέσεις.

$$\text{Ισχύει: } \frac{m_1}{m_{\text{τοίχ}}} \approx 0$$

Σύμφωνα με τις γνωστές σχέσεις της ελαστικής κρούσης θα είναι:

$$u_1' = \frac{(m_1 - m_{\text{τοίχ}})u_1}{m_1 + m_{\text{τοίχ}}} + \frac{2m_{\text{τοίχ}} \cdot 0}{m_1 + m_{\text{τοίχ}}} \Rightarrow$$



$$u_1' = \frac{m_{\text{τοίχ}} \left(\frac{m_1}{m_{\text{τοίχ}}} - 1 \right) u_1}{m_{\text{τοίχ}} \left(\frac{m_1}{m_{\text{τοίχ}}} + 1 \right)} \Rightarrow u_1' = \frac{0-1}{0+1} u_1 \Rightarrow \boxed{u_1' = -u_1}$$

$$U_{\text{τοίχ}}' = \frac{(m_{\text{τοίχ}} - m_1)0}{m_1 + m_{\text{τοίχ}}} + \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_{\text{τοίχ}}} \Rightarrow U_{\text{τοίχ}}' = \frac{2m_1 u_1}{m_{\text{τοίχ}} \left(\frac{m_1}{m_{\text{τοίχ}}} + 1 \right)}$$

$$\Rightarrow U_{\text{τοίχ}}' = \frac{2 \cdot 0 \cdot u_1}{0+1} \leftrightarrow \boxed{U_{\text{τοίχ}}' = 0}$$

Μεταβολή ορμής: $\Delta P = -mu - mu = -2mu$

Μέση τιμή της F που δέχεται από τον τοίχο: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-2mu}{\Delta t}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σε μια κρούση η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή και όχι του κάθε σώματος χωριστά, το ίδιο ισχύει και για την κινητική ενέργεια εφόσον η κρούση είναι ελαστική.

2. Στην ελαστική κρούση η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του δεύτερου σώματος:

$$\Delta K_1 = -\Delta K_2$$

$$\text{Α. Δ. Κ. Ενέργειας: } K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 \Rightarrow K_2 - K'_2 = K'_1 - K_1 \Rightarrow$$

$$-(K'_2 - K_2) = \Delta K_1 \Rightarrow \boxed{\Delta K_1 = -\Delta K_2}$$

3. Η μεταβολή της ορμής του πρώτου σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής του δεύτερου σώματος.

$$\Delta P_1 = -\Delta P_2$$

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \Rightarrow P_2 - P'_2 = P'_1 - P_1 \Rightarrow -(P'_2 - P_2) = \Delta P_1 \Rightarrow \boxed{\Delta P_1 = -\Delta P_2}$$

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ

Στις ανελαστικές κρούσεις ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας γίνεται θερμότητα. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ. Κινητ. Ενέργειας αλλά μόνο την Α.Δ.Ε. Βέβαια ισχύει κανονικά η Α.Δ.Ο.

$$\text{Α.Δ.Ο } p_{\text{ολ,αρχ}} = p_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow \boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2} \quad (1)$$

$$\text{Α.Δ.Ε } E_{\text{ολ,αρχ}} = E_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + Q \Rightarrow K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 + Q \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 + Q} \quad (2)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Στην σχέση (1) μπαίνουν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.
- 2) Δεν ισχύουν οι τύποι που μάθαμε της ελαστικής κρούσης.
- 3) Ποσοστό μετατροπής σε θερμότητα:

$$\alpha\% = \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} 100\% \Rightarrow \alpha\% = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} 100\% \Rightarrow \alpha\% = 1 - \frac{K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}}$$

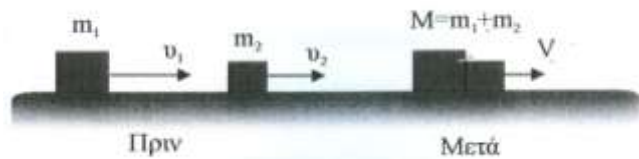
100%

- 4) Ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας: $\alpha\% = \frac{K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} 100\%$

$$\Rightarrow \alpha\% = - \left(1 - \frac{K_{\text{τελ}}}{K_{\text{αρχ}}} \right) 100\%$$

- 5) Στην **πλαστική** κρούση έχουμε συσσωμάτωμα άρα:

$$\boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = U_{\sigma} (m_1 + m_2)}$$



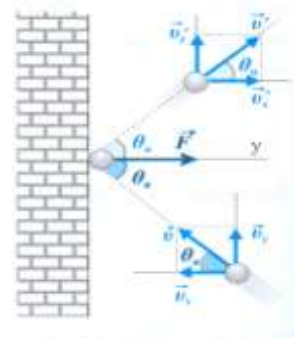
$$E_{\text{ολ.αρχ}} = E_{\text{ολ.τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + Q \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_{\sigma}^2 + Q}$$

Δηλαδή $K_{\text{τελ}} < K_{\text{αρχ}}$

Πλάγια πρόσκρουση

Αν μια σφαίρα προσκρούσει ελαστικά και πλάγια σε λείο κατακόρυφο τοίχο τότε ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

$$\boxed{u = u'} \quad \text{και} \quad \boxed{\theta_{\pi} = \theta_{\alpha}}$$



Για να μελετήσουμε σωστά την κρούση πρέπει να αναλύσουμε την ταχύτητα σε συνιστώσες u_x και u_y . Η αρχική ταχύτητα πριν την κρούση είχε μέτρο $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

$$\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Η συνιστώσα u_x είναι κάθετη στον τοίχο επομένως θα αλλάξει φορά χωρίς να αλλάξει το μέτρο της. ($u_x = -u'_x$).

Στον άξονα y δεν ασκείται καμία δύναμη στο σώμα άρα η συνιστώσα u_y δεν αλλάζει. Δηλαδή $u_y = u'_y$.

Άρα η ταχύτητα μετά την κρούση θα είναι: $u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} \Rightarrow u' = \sqrt{(-u_x)^2 + u_y^2}$

$$\Rightarrow u' = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad \boxed{u = u'}$$

Επίσης για τις γωνίες ισχύει:

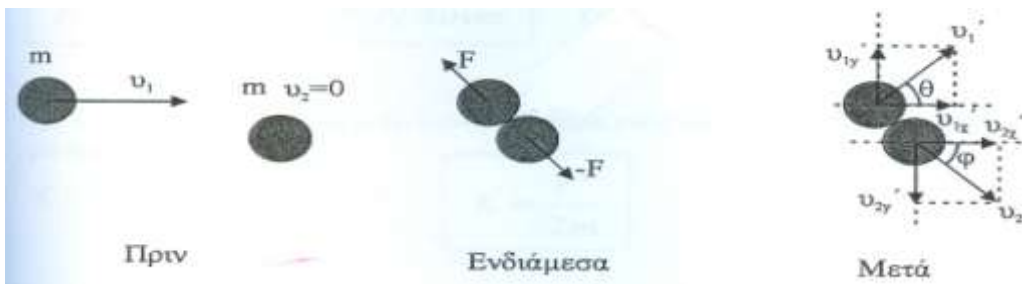
$$\eta\mu\theta_{\pi} = \frac{u_y}{u} \text{ και } \eta\mu\theta_{\alpha} = \frac{u'_y}{u'} = \frac{u_y}{u} \Rightarrow \eta\mu\pi = \eta\mu\theta \Rightarrow \theta_{\pi} = \theta_{\alpha}$$

Δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Μεταβολή ορμής: $\Delta P = -mu_x - mu_x = -2 mu_x$

ΠΛΑΓΙΑ ΚΡΟΥΣΗ

A) Πλάγια ελαστική κρούση



Επιλέγουμε σύστημα ορθογωνίων αξόνων και αναλύουμε τις ταχύτητες ή τις ορμές.

Α.Δ.Ο xx: $p_{\text{αρχ}x} = p_{\text{τελ}x} \Rightarrow m_1 u_1 = m_1 u'_{1x} + m_2 u'_{2x} \Rightarrow u_1 = u'_{1x} + u'_{2x} \Rightarrow u_1 = u'_{1x} \cos\theta + u'_{2x} \sin\phi \Rightarrow$
 $u_1^2 = u'_{1x}{}^2 \cos^2\theta + u'_{2x}{}^2 \sin^2\phi + 2 u'_{1x} u'_{2x} \cos\theta \sin\phi$ (1)

yy: $p_{\text{αρχ}y} = p_{\text{τελ}y} \Rightarrow 0 = m_1 u'_{1y} - m_2 u'_{2y} \Rightarrow 0 = u'_{1y} \eta\mu\theta + u'_{2y} \eta\mu\phi$
 \Rightarrow
 $0 = u'_{1y} \eta\mu\theta + u'_{2y} \eta\mu\phi - 2 u'_{1y} u'_{2y} \eta\mu\theta \eta\mu\phi$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow u_1^2 = u'_{1x}{}^2 + u'_{2x}{}^2 (\cos\theta \sin\phi - \eta\mu\theta \eta\mu\phi) \Rightarrow$
 $u_1^2 = u'_{1x}{}^2 + u'_{2x}{}^2 + 2 u'_{1x} u'_{2x} \sin(\phi + \theta)$ (3)

Α. Δ . Κ. Ενέργειας : $K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'_{1x}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 u'_{2x}{}^2$
 $\Rightarrow u_1^2 = u'_{1x}{}^2 + u'_{2x}{}^2$ (4)

Από (3) και (4) $2 u'_{1x} u'_{2x} \sin(\phi + \theta) = 0 \Rightarrow \sin(\phi + \theta) = 0 \Rightarrow \phi + \theta = 90^\circ$

Δηλαδή οι σφαίρες μετά την κρούση κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις.

B) Πλάγια ανελαστική κρούση

Χρησιμοποιούμε ίδια μεθοδολογία με τις ελαστικές κρούσεις αλλά αντί για Α. Δ . Κ. Ενέργειας χρησιμοποιούμε την Α.Δ.Ε.

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + Q$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'_{1x}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 u'_{2x}{}^2 + Q$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

✓ Ερωτήσεις κλειστού τύπου- κρούσεις

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος;

1. Α) Η κρούση είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο τα συγκρουόμενα σώματα έρχονται οπωσδήποτε σε επαφή.
Β) Στην κεντρική κρούση δύο σφαιρών οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
Γ) Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων που συγκρούονται υπακούουν στην αρχή δράσεις – αντίδρασης.
Δ) Αν οι ταχύτητες δύο σφαιρών που συγκρούονται έχουν τυχαίες διευθύνσεις η κρούση χαρακτηρίζεται ως έκκεντρη.

2. Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται:

- Α) μόνο στις ελαστικές κρούσεις. Γ) σε όλα τα είδη των κρούσεων.
Β) μόνο στις πλαστικές κρούσεις. Δ) σε καμία περίπτωση.

3. Σε κάθε κρούση μεταξύ δύο σφαιρών μεταβάλλεται :

- Α) η ορμή κάθε σφαίρας. Γ) η ταχύτητα κάθε σφαίρας.
Β) η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών. Δ) η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών.

4. Μια κρούση χαρακτηρίζεται ως ελαστική όταν :

- Α) η ορμή του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή.
Β) η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος.
Γ) η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή.
Δ) η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας των σωμάτων που συγκρούονται ,μεταβάλλεται.

5. Α) Κάθε ανελαστική κρούση είναι και κεντρική.

Β) Κάθε πλαστική κρούση είναι και ανελαστική.

Γ) Σε κάθε ανελαστική κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

Δ) Σε κάθε πλαστική κρούση η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

6. Α) Στο μακρόκοσμο η ελαστική κρούση αποτελεί μια εξιδανίκευση.

Β) Στην έκκεντρη κρούση μεταξύ δύο σφαιρών οι ταχύτητες τους πριν την κρούση έχουν την διεύθυνση της ευθείας που διέρχεται από τα κέντρα των δύο σφαιρών.

Γ) Στο μικρόκοσμο είναι αδύνατο να συμβούν απολύτως ελαστικές κρούσεις.

Δ) Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο αμελητέας χρονικής διάρκειας δεν έχουμε μεταβολή στην δυναμική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται.

7. Κατά την ελαστική κρούση δύο σφαιρών A και B η μεταβολή της ορμής της σφαίρας A είναι:

- A) ίση με τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας B.
- B) ίση με το διπλάσιο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας B.
- Γ) αντίθετη με τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας B.
- Δ) μικρότερη της μεταβολής της ορμής της σφαίρας B.

8. Κατά την ανελαστική κρούση δύο σωμάτων:

- A) η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων ελαττώνεται.
- B) η ορμή του συστήματος των σωμάτων παραμένει σταθερή.
- Γ) η δυναμική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων αυξάνεται.
- Δ) η κινητική ενέργεια κάθε σώματος ξεχωριστά παραμένει σταθερή.

9. Η αρχή διατήρησης ενέργειας ισχύει:

- A) μόνο στις ελαστικές κρούσεις. B) μόνο στις ελαστικές κρούσεις.
- Γ) σε κάθε είδος κρούσης.
- Δ) σε κάθε είδος κρούσης αρκεί στα σώματα που συγκρούονται να ασκούνται δυνάμεις τριβής.

✓ Ερωτήσεις ανοιχτού τύπου στις κρούσεις

1. Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 οπότε εξαιτίας της κρούσης οι δύο σφαίρες αποκτούν αντίθετες ταχύτητες. Οι μάζες m_1 και m_2 των δύο σφαιρών ικανοποιούν την σχέση:

- A) $3 m_1 = m_2$ B) $2 m_1 = m_2$ Γ) $4 m_1 = m_2$


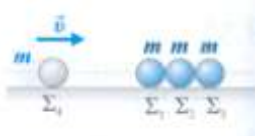
2. Μικρό σώμα Σ_1 μάζας m_1 κινούμενο σε οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με δεύτερο μικρό σώμα Σ_2 μάζας m_2 το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταβιβάζεται στο Σ_2 εξαιτίας της κρούσης είναι ίσο με 100 % αν ισχύει:

- A) $m_1 = m_2$ B) $m_1 > m_2$ Γ) $m_1 < m_2$

3. Μια σφαίρα με μάζα m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Η μεγαλύτερη τιμή του μέτρου της ταχύτητας που μπορεί να έχει η σφαίρα μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι: A) $2u$ B) u Γ) $4u$

4. Δύο σφαίρες 1 και 2 με μάζες m_1 και m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες u_1 και u_2 αντίστοιχα, έχοντας αντίθετες ορμές και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων u_1' , u_2' που αποκτούν οι σφαίρες εξαιτίας της κρούσης ικανοποιούν τις σχέσεις:

- A) $u_1' = u_1$ και $u_2' = u_2$ B) $u_1' = -u_1$ και $u_2' = -u_2$ Γ) $u_1' = -2u_1$ και $u_2' = u_2$

5. Μια σφαίρα με μάζα m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου u_1' . Αν ο λόγος u_1' / u_1 είναι ίσος με $3/5$ τότε ο λόγος m_1/m_2 είναι ίσος με : Α) 4 Β) $5/3$ Γ) $1/4$
6. Δύο σημειακά αντικείμενα 1 και 2 συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά και εξαιτίας της κρούσης τους η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του αντικειμένου 1 ισούται με μηδέν. Για τις ορμές p_1 και p_2 των σημειακών αντικειμένων 1 και 2 αντίστοιχα πριν την κρούση ισχύει: Α) $p_1 = p_2$ Β) $p_1 = -p_2$ Γ) $p_1 = 0$ και $p_2 \neq 0$
7. Δύο σφαίρες 1 και 2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα κινούνται στην ίδια ευθεία και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Εξαιτίας της κρούσης η σφαίρα 1 αποκτά ταχύτητα διπλάσιου μέτρου και αντίθετης φοράς από την ταχύτητα που είχε ελάχιστα πριν την κρούση. Αν οι μάζες των δύο σφαιρών ικανοποιούν την σχέση $3m_1 = m_2$ τότε εξαιτίας της κρούσης η σφαίρα 2:
 Α) αποκτά ταχύτητα διπλάσιου μέτρου από την ταχύτητα που είχε ελάχιστα πριν την κρούση.
 Β) αποκτά ταχύτητα υποδιπλάσιου μέτρου από την ταχύτητα που είχε ελάχιστα πριν την κρούση. Γ) ακινητοποιείται.
8. Μια σφαίρα με μάζα m_1 κινείται οριζόντια σε λείο δάπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 ($m_1 < m_2$). Στη συνέχεια η σφαίρα μάζας m_2 συγκρούεται ελαστικά και κάθετα με ακίνητο λείο τοίχωμα. Αν μετά τις δύο κρούσεις η απόσταση των δύο σφαιρών παραμένει σταθερή τότε ο λόγος των μαζών τους είναι:
 Α) $m_2 / m_1 = 2$ Β) $m_2 / m_1 = 3$ Γ) $m_2 / m_1 = 1/3$
9. Οι τρεις ελαστικές σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 του σχήματος έχουν μάζες m, m και $3m$ αντίστοιχα και βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή εκτοξεύουμε τη σφαίρα Σ_1 με ταχύτητα μέτρου u στη διεύθυνση της ευθείας που διέρχεται από τις τρεις σφαίρες και προς τη θετική κατεύθυνση.
- 
- Α) Μετά από δύο ελαστικές κεντρικές κρούσεις μεταξύ των σφαιρών η ορμή του συστήματος των τριών σφαιρών είναι ίση με : i) $+m u$ ii) $-m u$ iii) $+2m u$
 Β) Μετά από τρεις κεντρικές ελαστικές κρούσεις μεταξύ των σφαιρών η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 είναι ίση με: i) $-u$ ii) $-u/2$ iii) $-u/3$
10. Τρεις ίδιες ελαστικές σφαίρες Σ_1, Σ_2 και Σ_3 είναι ακίνητες σε λείο οριζόντιο δάπεδο πολύ κοντά η μία στην άλλη με τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία. Μια τέταρτη ίδια ελαστική
- 

σφαίρα Σ_4 κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα Σ_1 με αποτέλεσμα η Σ_3 να αποκτήσει ταχύτητα μέτρου u_3 . Αν οι σφαίρες Σ_1 και Σ_2 ήταν κολλημένες μεταξύ τους τότε η σφαίρα Σ_3 θα αποκτούσε ταχύτητα μέτρου u_3' . Ο λόγος u_3 / u_3' ισούται με: Α) 1 Β) 8/9 Γ) 9/10

11. Δύο σφαίρες που έχουν διαφορετικές μάζες κινούνται στην ίδια ευθεία και συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Εξαιτίας της κρούσης η απώλεια μηχανικής ενέργειας ισούται με 100% της κινητικής ενέργειας που είχε το σύστημα ελάχιστα πριν την κρούση. Πριν την κρούση τα δύο σώματα έχουν:

Α) ίσες κινητικές ενέργειες. Β) αντίθετες ταχύτητες. Γ) αντίθετες ορμές.

12. Σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο δάπεδο έχοντας κινητική ενέργεια K και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα τριπλάσιας μάζας. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που παραμένει στο σύστημα των δύο σωμάτων μετά την κρούση είναι: α) 50% β) 25% γ) 75%

13. Ένα αυτοκίνητο Α μάζας M βρίσκεται σταματημένο σε κόκκινο φανάρι. Ένα άλλο αυτοκίνητο Β μάζας m , πέφτει στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου Α. Η κρούση θεωρείται κεντρική και πλαστική. Αν αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια ίση με το $1/3$ της κινητικής ενέργειας που είχε ακριβώς πριν την κρούση τότε θα ισχύει: Α) $m/M = 1/6$ Β) $m/M = 1/2$ Γ) $m/M = 1/3$

14. Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα u_1 και συγκρούεται κεντρικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 4m_1$. Το σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση κινείται αντίθετα από την αρχική του κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $u_1/2$. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι: Α) πλαστική Β) ανελαστική

15. Δύο σφαίρες 1 και 2 με μάζες m_1 και m_2 που ικανοποιούν την σχέση $m_2 = 3m_1$ κινούνται με ορμές p_1 και p_2 αντίστοιχα που έχουν ίσα μέτρα και οι φορείς τους είναι κάθετοι μεταξύ τους. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται πλαστικά οπότε προκύπτει συσσωμάτωμα που κινείται με ορμή $p_{\text{συσ}}$ και ταχύτητα $u_{\text{συσ}}$. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;

Α) $p_{\text{συσ}} = p_1 + p_2$ Β) $3P_1^2 + P_2^2 = 0,75P_{\text{συσ}}^2$ Γ) $u_1 = 3u_2$ Δ) $u_{\text{συσ}} = \sqrt{2}/4 u_1$

16. Σφαίρα μάζας m συγκρούεται μη κεντρικά με ακίνητη σφαίρα ίσης μάζας. Η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση είναι 90° . Η κρούση των δύο σφαιρών είναι: α) ανελαστική β) ελαστική

17. Μια σφαίρα μάζας m κινείται στην διεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα u και συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας $2m$. Μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m κινείται κάθετα στην αρχική της διεύθυνση. Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα της σφαίρας μάζας $2m$ μετά την κρούση με τον άξονα x ισούται με: Α) 45° Β) 30° Γ) 60°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΡΟΥΣΕΙΣ

1. Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 1\text{ kg}$ και $m_2 = 3\text{ kg}$ κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες μέτρου 4 m/s και 2 m/s αντίστοιχα και αντίθετης φοράς. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Να υπολογίσετε:
- A) την ταχύτητα κάθε σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
 - B) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης.
 - Γ) το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης.
2. Μικρή σφαίρα μάζας $m_1 = 3\text{ kg}$, η οποία κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα u_1 , συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη μικρή σφαίρα μάζας $m_2 = 1\text{ kg}$ που βρίσκεται ακίνητη στο λείο δάπεδο. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση ισούται με 24 J .
- A) Να υπολογίσετε την ταχύτητα κάθε σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
 - B) Να αποδείξετε ότι το ποσοστό επί τοις εκατό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε με την κρούση στη σφαίρα μάζας m_2 εξαρτάται μόνο από τον λόγο των μαζών των δύο σφαιρών και κατόπιν να υπολογίσετε το ποσοστό αυτό.
3. Μια σφαίρα μάζας $m_1 = 6\text{ kg}$, η οποία κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $u_1 = 10\text{ m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη μικρή σφαίρα μάζας $m_2 = 4\text{ kg}$ που κινείται με ταχύτητα u_2 μέτρου 5 m/s και ίδιας φοράς με αυτή της ταχύτητας της σφαίρας μάζας m_1 . Να υπολογίσετε:
- A) τις ταχύτητες των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.
 - B) το πηλίκο της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 εξαιτίας της κρούσης προς την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_2 .
4. Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 3\text{ kg}$ και $m_2 = 1\text{ kg}$ κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητες μέτρου 4 m/s και 2 m/s αντίστοιχα, που έχουν αντίθετη φορά. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.
- A) Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε την κατεύθυνση της ταχύτητας κάθε σφαίρας μετά την κρούση.
 - B) Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης.
5. Ένα μικρό σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 5\text{ kg}$, κινούμενο με ταχύτητα μέτρου 12 m/s συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με δεύτερο μικρό σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{ kg}$, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Να υπολογίσετε:
- A) Το πηλίκο του μέτρου της μεταβολής της ορμής του Σ_1 προς το μέτρο της μεταβολής της ορμής του Σ_2 .

B) Την ενέργεια που μεταφέρθηκε από το σώμα Σ_1 στο Σ_2 εξαιτίας της κρούσης.

6. Το σώμα (1) του σχήματος έχει μάζα m_1 και εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_0 = 10 \text{ m/s}$ από το σημείο A ενός οριζόντιου δαπέδου με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu_1 = 0,2$. Αφού το σώμα (1) διανύσει διάστημα $s_1 = 9 \text{ m}$ στο οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = m_1$ το οποίο εμφανίζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής $\mu_2 = 0,32$. Να υπολογίσετε:

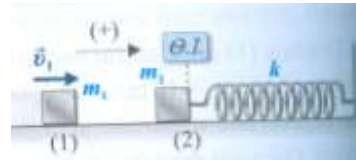


A) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος 2 αμέσως μετά την ελαστική κρούση.

B) τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

7. Μικρό σώμα (1) μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα u_1 μέτρου $2,5 \text{ m/s}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα (2) μάζας $m_2 = 4 \text{ kg}$. Το σώμα (2) είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

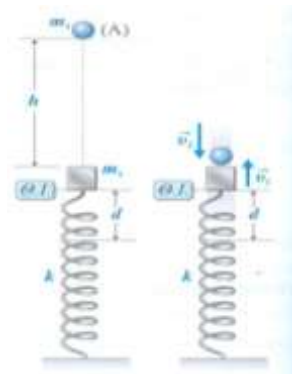


A) Το μέτρο της ορμής του σώματος 2 αμέσως μετά την κρούση.

B) τη μεταβολή της ορμής του σώματος 1 εξαιτίας της κρούσης.

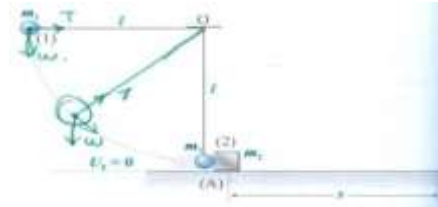
Γ) τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης από τη $\Theta.I$, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ταλάντωσης του σώματος 2 μετά την κρούση θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά.

8. Το σώμα μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$ του σχήματος είναι δεμένο στο ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο δάπεδο και αρχικά ισορροπεί ακίνητο. Στην ίδια κατακόρυφο με το σώμα μάζας m_1 και σε ύψος $h = 0,2 \text{ m}$ πάνω από αυτό κρατείται ακίνητο ένα άλλο σώμα ίσης μάζας με το πρώτο ($m_1 = m_2$). Εκτρέπουμε το σώμα μάζας m_1 από τη θέση ισορροπίας του συσπειρώνοντας επιπλέον το ελατήριο κατά $d = 0,4 \text{ m}$ και μια χρονική στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση που το εκτρέψαμε, ενώ ταυτόχρονα αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί και το σώμα μάζας m_2 . Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά στη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 . Τη στιγμή της κρούσης το σώμα μάζας 1 διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του μετά τη στιγμή που το αφήσαμε ελεύθερο. Να υπολογίσετε:



- Α) Τη χημική ενέργεια που καταναλώσαμε για την εκτροπή του σώματος μάζας m_1 κατά d .
- Β) τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.
- Γ) το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα μάζας m_1 μετά την κρούση.

9. Μικρό σώμα (1) μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος $L = 1,8 \text{ m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και κάποια στιγμή το αφήνουμε ελεύθερο από τη θέση που το εκτρέψαμε χωρίς αρχική ταχύτητα. Όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο, το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα 2 μάζας $m_2 = 2 \text{ kg}$, το οποίο βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα 2 μετά την κρούση κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής μ , και διανύει διάστημα $s = 20 \text{ m}$ μέχρι να σταματήσει. Να υπολογίσετε: (Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



- Α) την ταχύτητα κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση.
- Β) τη μέγιστη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο μετά την κρούση.
- Γ) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μ μεταξύ του σώματος 2 και του οριζόντιου δαπέδου.
- Δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής ενέργειας του σώματος 1 που έγινε θερμότητα λόγω τριβής κατά την κίνηση του σώματος 2 στο οριζόντιο δάπεδο.

10. Μία σφαίρα μάζας $m_1 = 6 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα u_1 μέτρου 10 m/s και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα μάζας $m_2 = 4 \text{ kg}$ η οποία κινείται με ταχύτητα u_2 μέτρου 5 m/s και ίδιας φοράς με αυτή της ταχύτητας της σφαίρας m_1 . Να υπολογίσετε:

- Α) τις ταχύτητες των δύο σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.
- Β) το πηλίκο της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_1 εξαιτίας της κρούσης προς την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_2 .

11. Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 3 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρου 4 m/s και 2 m/s αντίστοιχα που έχουν ίδια φορά. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Α) Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε την κατεύθυνση της ταχύτητας κάθε σφαίρας αμέσως μετά την κρούση. Β) Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας εξαιτίας της κρούσης.