# <u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές του φροντιστηρίου “Η Σπουδή” που φοιτούν στην Γ’ Λυκείου. Στόχος του βιβλίου είναι να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο που μαζί με το Σχολικό Βιβλίο, θα βοηθήσει τον υποψήφιο μαθητή να μελετήσει και να προετοιμαστεί κατάλληλα στο μάθημα “Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής”.

Το βιβλίο περιέχει:

· Συνοπτική θεωρία.

· Σχόλια στην θεωρία για μεγαλύτερη εμβάθυνση στις έννοιες του μαθήματος.

· Άλυτες ασκήσεις.

· Θέματα Εξετάσεων.

· Απαντήσεις των ασκήσεων.

Το βιβλίο αυτό αφιερώνεται σε όλους εκείνους που μοχθούν, κυνηγώντας τα όνειρά τους …

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{O}$ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

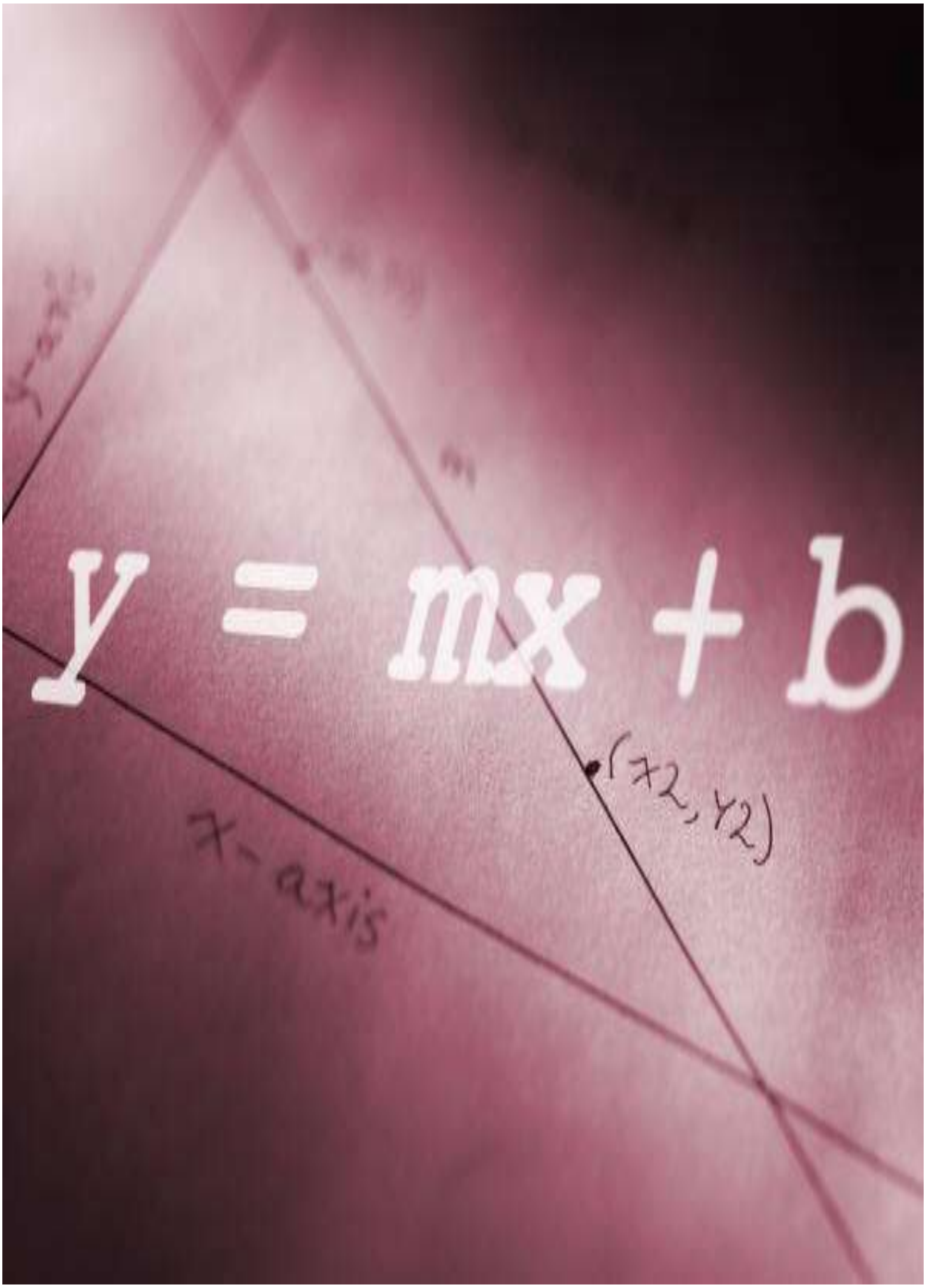


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{O}$ : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{O}$ : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



# $1^{O}$ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Α. ΘΕΩΡΙΑ:

Πεδίο Ορισμού Α μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τιμών του $x$ για τις οποίες η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης έχει έννοια πραγματικού αριθμού.

Δηλαδή: $\boxed{A_f = \{x \in R \,/\, f(x) \in R\}}$

Επομένως οι περιορισμοί για τον προσδιορισμό του πεδίου ορισμού συνάρτησης εξαρτώνται από τον τύπο της. Αν ο τύπος περιέχει:
**α. κλάσματα**, τότε οι παρονομαστές του πρέπει να είναι διάφοροι από το μηδέν.
**β. ρίζες**, τότε τα υπόριζα πρέπει να είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το μηδέν.
**γ. λογαρίθμους**, τότε οι λογαριθμιζόμενες ποσότητες πρέπει να είναι θετικές.

**ΣΧΟΛΙΑ:**

**1.** Πεδία ορισμού μερικών βασικών συναρτήσεων:
**α.** Πολυωνυμικής $P(x)$ το $R$.
**β.** Λογαριθμικής $\ln x$ το $R_+^*$.
**γ.** Εκθετικής $a^x, e^x$ το $R$.
**δ.** ημx , συνx το $R$.
**ε.** εφx το $R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}, \kappa \in Z$.
**ζ.** σφx το $R - \{\kappa\pi\}, \kappa \in Z$.

**2.** Το πεδίο ορισμού το βρίσκουμε **πάντα στην αρχή** κάθε άσκησης και **χωρίς να απλοποιήσουμε** τον τύπο της συνάρτησης.

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού σε καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

**1.** **α.** $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ **β.** $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-6x^2}$ **γ.** $f(x) = \dfrac{2x}{4x^2-1}$

**δ.** $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{2x^2-6x+4}$ **ε.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-6x+9}$ **ζ.** $f(x) = \dfrac{e^x}{2x^2-3x+2}$

**η.** $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2}$ **θ.** $f(x)=\dfrac{x-1}{9^x+3^x-90}$ **ι.** $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$

**κ.** $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ **λ.** $f(x)=\dfrac{x}{x^3-8}+\dfrac{1}{x^3+1}$

**2.** **α.** $f(x)=\sqrt{2-3x}$ **β.** $f(x)=\sqrt{x+1-2x^2}$ **γ.** $f(x)=\sqrt{e^x-3}$
**δ.** $f(x)=\sqrt{2e^x-4}$ **ε.** $f(x)=\sqrt{1-e^{x-1}}$ **ζ.** $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+8}$

**3.** **α.** $f(x)=\ln\left(x^2-3x\right)$ **β.** $f(x)=\ln(x-1)$ **γ.** $f(x)=\ln x^2$
**δ.** $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$ **ε.** $f(x)=\ln\left(2e^x-4\right)$ **ζ.** $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
**η.** $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x-\ln x}$

**4.** **α.** $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ **β.** $f(x)=\ln(\dfrac{x}{1-x})$ **γ.** $f(x)=\ln\left(\sqrt{3x-1}-2\right)$
**δ.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-4}$ **ε.** $f(x)=\dfrac{\ln(2x-1)}{2^x-2}$ **ζ.** $f(x)=\ln\left(1-\ln(x-1)\right)$

**5.** Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές που ζητούνται για καθένα από τα προηγούμενα παραδείγματα των ασκήσεων 1 ως 4:

**α.** 1β. $f(0), f(1)$ **β.** 1η. $f(0), f(\ln 2), f(\ln 3)$ **γ.** 2α. $f(1), f(-1)$
**δ.** 2ε. $f(0), f(1)$ **ε.** 3ζ. $f(0), f(1), f(e)$

## $2^{O}$ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Α. ΘΕΩΡΙΑ:

Έστω συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ με πεδία ορισμού $A_f$ και $A_g$ αντίστοιχα.

Για τις πράξεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ έχουμε:

| Πράξη | Πεδίο Ορισμού | Τύπος |
|---|---|---|
| $S=f+g$ | $A=A_f\cap A_g$ | $S(x)=f(x)+g(x)$ |
| $D=f-g$ | $A=A_f\cap A_g$ | $D(x)=f(x)-g(x)$ |
| $P=f\cdot g$ | $A=A_f\cap A_g$ | $P(x)=f(x)\cdot g(x)$ |
| $R=\dfrac{f}{g}$ | $B=A-\{x\in A/\,g(x)=0\}$ | $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ |

### Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

**1.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ και $g$. Να γίνουν οι πράξεις που σημειώνονται.

**α.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{1-x^2}}$ , $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{-x+1}}$ , $f+g,\ f\cdot g$

**β.** $f(x)=x-1+\dfrac{6}{x-6}$ , $g(x)=x-2+\dfrac{3}{x-6}$ , $\dfrac{f}{g},\ f-g$

**γ.** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}-\dfrac{2}{x^2-4}$ , $g(x)=\dfrac{3}{x^3-x^2-4x+4}$ , $f+g,\ f-2g$

**2.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x^2$ και $g(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι τύποι των συναρτήσεων: $S=f+g$ και $R=\dfrac{f}{g}$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές $S(3)$, $S(0)$, $R(1)$, $R(e)$.

**3.** Αν για τις συναρτήσεις $f$ και $g$ ισχύει ότι $f(2)=2g(2)=1$, να βρείτε για $x=2$ τις τιμές των συναρτήσεων: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{g}{f}$, $\dfrac{f}{g}$.

# $3^{\text{Ο}}$ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Α. ΘΕΩΡΙΑ:

**1.** **α.** Η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ διέρχεται από το σημείο Μ( $x, y$ ).
**β.** Η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ περνάει από το σημείο Μ( $x, y$ ).
**γ.** Το σημείο Μ( $x, y$ ) είναι σημείο της γραφικής παράστασης $C_f$ της συνάρτησης $f$ .
$\Leftrightarrow \boxed{y = f(x)}$

**2.** **α.** Η $C_f$ της συνάρτησης $f$ είναι πάνω από τον άξονα x΄x $\Leftrightarrow$ $f(x) > 0$ .
**β.** Η $C_f$ της συνάρτησης $f$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x $\Leftrightarrow$ $f(x) < 0$ .
**γ.** Η $C_f$ της συνάρτησης $f$ είναι πάνω (ή κάτω) από την $C_g$ της συνάρτησης $g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (ή $f(x) < g(x)$).

**3.** **α.** Η $C_f$ της συνάρτησης $f$ τέμνει τον άξονα x΄x $\Leftrightarrow$ λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$ .
**β.** Η $C_f$ της συνάρτησης $f$ τέμνει τον άξονα y΄y $\Leftrightarrow$ θέτω όπου $x = 0$ .

**ΣΧΟΛΙΟ:**

Σε οποιαδήποτε περίπτωση αναφερόμαστε σε σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$ , **εννοείται ότι** η τετμημένη του σημείου Μ( $x, y$ ) δηλαδή το x, ανήκει στο **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης $f$ .

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ τέμνει τον άξονα y΄y. ( Τι παρατηρείτε ! ! ! )

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$ .
**α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
**β.** Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της $f$ όπου τέμνει τους άξονες.
**γ.** Από ποια από τα σημεία Α(2,0), Β(1,0), Γ(0,5) και Δ(3,7) διέρχεται η $C_f$ ;
**δ.** Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $f$ είναι πάνω από τον άξονα x΄x;

**2.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + x - 1$.
**α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
**β.** Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της $f$ όπου τέμνει τους άξονες.
**γ.** Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση $f$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x;

**3.** Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2-x-x^2}{\ln x}$.

**α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f$.

**β.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι κάτω από τον άξονα x΄x για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

**4.** Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

**α.** Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της $f$ όπου τέμνει τους άξονες.

**β.** Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της $f$ με τεταγμένη 1.

**5.** Αν η ευθεία (ε): $y=3x-2$ και η καμπύλη $f\left(x\right)=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}-1$ έχουν κοινά σημεία τα Α, Β με τετμημένες 1, -1 αντίστοιχα, να βρείτε τα α και β.

**6.** Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\alpha x^3-11x^2+\beta x+2$.
Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία (2,0) και (1,-6), να βρεθούν οι αριθμοί α και β. Στη συνέχεια να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

**7.** Να βρεθεί για ποια τιμή του α, το σημείο Ν(2,-3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=\alpha x^3+5$.

**8.** Αν $f\left(x\right)=x^2$ και $g\left(x\right)=-6+5x$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των $f$ και $g$.

# $4^{O}$ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΌΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Α. ΘΕΩΡΙΑ:

**1.** Αν έχουμε να υπολογίσουμε όριο της μορφής $\lim_{x \to x_0} f(x)$ τότε κάνουμε αντικατάσταση όπου $x$ το $x_0$ και κάνουμε τις πράξεις…

**2.** Αν έχουμε να υπολογίσουμε όριο της μορφής $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ τότε κάνουμε αντικατάσταση όπου $x$ το $x_0$ και κάνουμε τις πράξεις…

**1ον.** Αν βρούμε πραγματικό αριθμό, βρήκαμε το όριο… ( είμαστε "τυχεροί" !!!)

**2ον.** Αν καταλήξουμε σε μορφή $\frac{0}{0}$ ( ονομάζεται απροσδιοριστία) τότε κάνουμε **παραγοντοποίηση στον αριθμητή και τον παρονομαστή**, απλοποιούμε το κλάσμα και "εξαφανίζεται" η απροσδιοριστία. Στη συνέχεια με αντικατάσταση υπολογίζουμε το όριο.

**ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ:**

**α.** Κοινός παράγοντας.
**β.** Ομαδοποίηση.
**γ.** Διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
**δ.** Ανάπτυγμα τετραγώνων: $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$.
**ε.** Άθροισμα κύβων: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
**ζ.** Διαφορά κύβων: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.
**η.** Τριώνυμο.
**θ.** Σχήμα Horner

**ΣΧΟΛΙΑ:**

**1.** Αν στον αριθμητή ή τον παρονομαστή (ή και τους δυο) εμφανίζονται παραστάσεις με ριζικά τότε πολλαπλασιάζουμε "πάνω και κάτω" με την συζηγή τους παράσταση.

| ΜΟΡΦΗ | ΣΥΖΗΓΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ |
|---|---|
| $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ | $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ |
| $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ | $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ |
| $\sqrt{\alpha} + \beta$ | $\sqrt{\alpha} - \beta$ |
| $\sqrt{\alpha} - \beta$ | $\sqrt{\alpha} + \beta$ |

2. Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

**α.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=l_1+l_2$

**β.** $\lim\limits_{x\to x_0}\kappa f(x)=\kappa\cdot l_1$

**γ.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=l_1\cdot l_2$

**δ.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{l_1}{l_2}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\nu}=l_1^{\nu}$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{l_1}$

**3.** Όριο “ σπαστής ” συνάρτησης όταν $x\to x_0$:

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ η οποία αλλάζει τύπο στο σημείο $x_0$.

Για παράδειγμα η $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ x-2, & x\geq 2\end{cases}$ αλλάζει τύπο στο $x_0$=2.

Για να βρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ τότε:

**α.** Υπολογίζουμε χωριστά τα όρια $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ και $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$, παίρνοντας κάθε φορά τον αντίστοιχο τύπο, τα οποία λέγονται πλευρικά όρια της $f(x)$ και τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

**β.** Αν $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ τότε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει και ισούται με ένα από τα πλευρικά (είναι ίσα!!!).

Αν $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ τότε λέμε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

Στο παράδειγμά μας έχουμε:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x+1)=2+1=3$ και $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)=2-2=0$.

Αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

**4.** Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το Α λέγεται συνεχής στο $x_0\in$ Α αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=2x$ στο σημείο $x_0=3$:

$\lim\limits_{x\to 3}(2x)=2\cdot 3=6$ και $f(3)=2\cdot 3=6$ άρα είναι συνεχής στο $x_0=3$.

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

**1.** Να υπολογιστούν τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων:

**α.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+6\right)$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x+1}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-6x+7\right)$ **δ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x^2+x-1}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-4x\right)$ **ζ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-2}{x-1}$ **η.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+5}+2x-1\right)$ **θ.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+20}-2}{x+\sqrt{x^2+5}}$

**ι.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x-\sqrt{2x+3}\right)$ **κ.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{7\ln^3 x-1}{2\ln x-\ln\left(2x-e\right)}$ **λ.** $\lim\limits_{x\to e}\ln x^2$ **μ.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\phi x-1}{2\eta\mu x+6}$

**ν.** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\varepsilon\phi 2x}{2x}$ **ξ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{-2x}+2e^{-x}}{x-\left(x+1\right)}$ **ο.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$ **π.** $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\sigma\upsilon\nu^2 x+\varepsilon\phi x-1\right)$

**ρ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3\cdot 2^x-3}{4^{1-x}-3\cdot 2009^x}$ **σ.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+4e^x+2x-1\right)$ **τ.** $\lim\limits_{x\to 10}\left(\log x^3-\log x\right)$ **υ.** $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{4\log x^3}{\log x-2\log\left(x^2-9x\right)}$

**2.** Ομοίως να υπολογιστούν τα όρια:

**α.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{2x-6}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{12-3x^2}{4x+8}$ **ζ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)^2}{x^2-1}$ **η.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{2x^2+7x+3}$ **θ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{5x^2+4x^4}$

**ι.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ **κ.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15-5x}{2x-6}$ **λ.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ **μ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2-x}{x}$

**3.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

**α.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x+6}{x+1}$ **β.** $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{3x^3+x^2+7x-6}{4-9x^2}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2+x-18}{x^2-4}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ **ζ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+6}{x^2+3x-4}$ **η.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}$ **θ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-7x-6}{x^2+3x+2}$

**ι.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ **κ.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+4x^2-x-2}{\frac{x}{2}+1}$

**4.** Ομοίως να υπολογιστούν τα όρια:

**α.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{2x^2-18}$ **β.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}}{x-2}$ **γ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}{x}$ **δ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{2\sqrt{x}-\sqrt{8}}$ **ζ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **η.** $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{16-x}$ **θ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

**ι.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$ **κ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ **λ.** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$ **μ.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+\sqrt{2x+6}}{1-\sqrt{x+2}}$

**ν.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^2-9}}$ **ξ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ **ο.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **π.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$

**5.** Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

**α.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ 2x-2, & x>1 \end{cases}$

**β.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} x-1, & x>3 \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}, & x\le 3 \end{cases}$

**γ.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+6}{5x-9}, & x<3 \\ x-1, & x\ge 3 \end{cases}$

**δ.** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+3}+x}{x+1}, & x<-1 \\ x^2+1, & x\ge -1 \end{cases}$

**ε.** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\le -2 \\ x^2, & x>-2 \end{cases}$

**ζ.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{2x-8}, & x\ge 4 \\ x, & x<4 \end{cases}$

**6.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x-4}, & x\ne 2 \\ \dfrac{\alpha^2}{2}+\alpha, & x=2 \end{cases}$.

**α.** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

**β.** Να βρείτε το α ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

**7.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}, & x>1 \\ 2\alpha+1, & x=1 \end{cases}$.

Να βρείτε το α ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

**8.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(-1,2), να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)\cdot(x^2+x)}{2-\sqrt{x+5}}$.

**9.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3\cdot f(x)-f(x)}{3x^2-x-2}$.

# $5^{O}$ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

## Α. ΘΕΩΡΙΑ:

**1.** Ορισμός παραγώγου στο σημείο $x_0$:

Μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο $x_0$ και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

**2.** Ορισμός παραγώγου συνάρτησης:

Έστω μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το Α και Β το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η $f$ είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f΄.

**3.** Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων, σύνθεσης και κανόνες παραγώγισης.

| ΑΠΛΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $(g(x))'=g'(x)$ | ΣΥΝΘΕΣΗ: $(g(f(x)))'=g'(f(x))\cdot f'(x)$ |
|---|---|
| $(c)'=0$ | |
| $(x)'=1$ | |
| $(x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1},\ \nu\in N^*, x\in R$ | $\left(f(x)^{\rho}\right)'=\rho\cdot(f(x))^{\rho-1}\cdot f'(x)$ |
| $(x^{\rho})'=\rho\cdot x^{\rho-1}$, ρ: ρητός, $x>0$ | |
| $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$ |
| $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ | $(\eta\mu f(x))'=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$ |
| $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$ | $(\sigma\upsilon\nu f(x))'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$ |
| $(\varepsilon\phi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ | $(\varepsilon\phi f(x))'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$ |
| $(e^x)'=e^x$ | $\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |
| $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | $\ln f(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$ |

| ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ | |
|---|---|
| $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$ | $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ |
| $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$ | $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)$ | |

**<u>ΣΧΟΛΙΑ:</u>**

**1.** Μια συνάρτηση $f$ και η παράγωγός της $f'$ **δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο πεδίο ορισμού**. Για παράδειγμα να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ και της παραγώγου της $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Τι παρατηρείτε ;;;

**2.** Για να υπολογίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης $f$ σε ένα σημείο $x_0$ δεν εφαρμόζουμε τον ορισμό (εκτός εάν μας το ζητάει).

Πρώτα βρίσκουμε την συνάρτηση $f'(x)$ εφαρμόζοντας όποιο τύπο ή κανόνα χρειάζεται και σε αυτήν θέτουμε $x = x_0$.

<u>Παράδειγμα:</u> Αν $f(x)=x^2$ να βρεθεί η $f'(3)$.

Έχουμε: $f'(x)=\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x$ και για $x=3$ παίρνουμε $f'(3)=2\cdot 3=6$.

## <u>Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ:</u>

**1.** Να βρείτε τον τύπο της παραγώγου για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

**α.** $f(x)=x+\eta\mu x$ **β.** $f(x)=x^2-10x+4$ **γ.** $f(x)=e^x-x^2$ **δ.** $f(x)=-x^3$

**ε.** $f(x)=x^7-x^8+4$ **ζ.** $f(x)=3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\ln 5$ **η.** $f(x)=2x^2-1$ **θ.** $f(x)=\eta\mu x-2\ln x$

**ι.** $f(x)=2x^3+x$ **κ.** $f(x)=\ln x+\ln 6$ **λ.** $f(x)=3x^4-6x^2$ **μ.** $f(x)=5\sqrt{3}+8\sqrt{x}$

**ν.** $f(x)=2x^3-3x^2$ **ξ.** $f(x)=-3\sqrt{x}+e^x-1$ **ο.** $f(x)=x^2-6x+2$

**2.** Ομοίως για τις συναρτήσεις:

**α.** $f(x)=x^3\cdot e^x$ **β.** $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$ **γ.** $f(x)=5x\cdot\ln x$ **δ.** $f(x)=x^2\cdot\eta\mu x$

**ε.** $f(x)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **ζ.** $f(x)=(2x-1)\cdot x^2$ **η.** $f(x)=(x^2+1)\cdot\ln x$ **θ.** $f(x)=\left(x^3+\sqrt{x}\right)\cdot e^x$

**3.** Ομοίως για τις συναρτήσεις:

**α.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ **β.** $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ **γ.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

**ε.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **ζ.** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **η.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ **θ.** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

**ι.** $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

**4.** Να βρείτε τις παραγώγους που ζητούνται εφαρμόζοντας κάθε φορά τον αντίστοιχο κανόνα.

$$\boxed{\textbf{A.}\quad \left[(f(x))^{\nu}\right]'=\nu\cdot(f(x))^{\nu-1}\cdot f'(x)}$$

**α.** $f(x)=\left(x^2+2x\right)^7$ **β.** $f(x)=2x\cdot(x+1)^3$ **γ.** $f(x)=\left(e^x+5\right)^4$ **δ.** $f(x)=\ln^4 x$

**ε.** $f(x)=\eta\mu^3 x$ **ζ.** $f(x)=e^x\cdot\ln^3 x$ **η.** $f(x)=\eta\mu^5 x$ **θ.** $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^5+\sigma\upsilon\nu^2 x$

**ι.** $f(x)=\sigma\upsilon\nu^4 x$ **κ.** $f(x)=(\sigma\upsilon\nu x)^6$ **λ.** $f(x)=2\cdot\left(x^2+3\right)^2+e^x\cdot\ln^2 x$

$$\boxed{\textbf{B.}\quad \left[e^{f(x)}\right]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)}$$

**α.** $f(x)=e^{x^2}$ **β.** $f(x)=e^{\sqrt{x}-x}$ **γ.** $f(x)=e^{3x^2-1}$ **δ.** $f(x)=e^{\left(\frac{1}{x}-x^2\right)\cdot x}$

**ε.** $f(x)=e^{-x^2+2}$ **ζ.** $f(x)=e^{\ln x+x^4}$ **η.** $f(x)=2e^{2x}-3$ **θ.** $f(x)=e^{\left(x^2+1\right)^2}$

**ι.** $f(x)=e^{\eta\mu x}$ **κ.** $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}$ **λ.** $f(x)=e^{(2x-1)^3}$

$$\boxed{\textbf{Γ.}\quad \left[\ln f(x)\right]'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}$$

**α.** $f(x)=\ln x^2$ **β.** $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}+x^3\right)$ **γ.** $f(x)=\ln\left(x^2+x\right)$ **δ.** $f(x)=\ln\left(2\sqrt{x}\cdot x^2\right)$

**ε.** $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ **ζ.** $f(x)=\ln\left(\eta\mu x+2e^x\right)$ **η.** $f(x)=\ln\sqrt{x}$ **θ.** $f(x)=\ln e^x$

**ι.** $f(x)=\ln(\eta\mu x)$ **κ.** $f(x)=\ln\left(e^{x^2+1}\right)$ **λ.** $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)$ **μ.** $f(x)=\ln(2x+1)^3$