ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Γραμμικά συστήματα:

Α. α. Κάθε εξίσωση που έχει (ή μπορεί να πάρει) την μορφή αx+βy=γ με α,β,γ $\in$ R και x,y$\in$ R λέγεται **γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους**.
Στην γραμμική εξίσωση αx+βy=γ έχουμε ότι:

- τα x,y είναι οι **άγνωστοι** της εξίσωσης (βλέπουμε ότι έχουν εκθέτη το 1!) .
- τα α,β λέγονται **συντελεστές** των αγνώστων.
- το γ λέγεται **σταθερός όρος**.

π.χ. Οι εξισώσεις 3x-y=9, $\frac{2}{17}$x+ 0,6y=14, -αx+βy=0 είναι γραμμικές εξισώσεις με δυο αγνώστους.

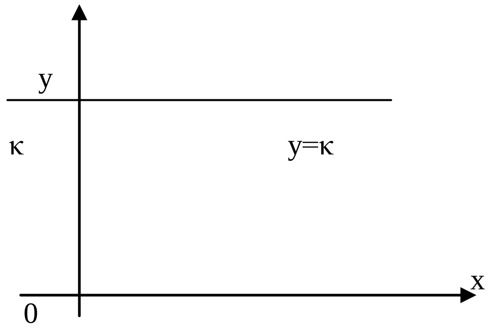
β. Επίλυση της εξίσωσης αx+βy=γ, α,β,γ $\in$R και x,y$\in$R:
Έχουμε ότι: αx+βy=γ $\Leftrightarrow$ βy=γ-αx $\Leftrightarrow$ y=$\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$ (β$\neq$0) άρα οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης αx+βy=γ είναι τα **άπειρα στο πλήθος ζεύγη** της μορφής (x, $\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$), β$\neq$0 (ή ($\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$,y), α$\neq$0 αν επιλύσουμε την εξίσωση ως προς x).

π.χ. Να λυθεί η εξίσωση 3x-y=9.
Έχουμε ότι: 3x-y=9$\Leftrightarrow$y=3x-9 και άρα οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης θα είναι της μορφής (x,3x-9), x$\in$R.

ΣΧΟΛΙΟ:
Αν θέλουμε να βρούμε μια λύση της εξίσωσης αx+βx=γ είτε δίνουμε μια τιμή στο x (ή το y) και βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή του y (ή του x) είτε βρίσκουμε μια λύση της από τα ζεύγη (x, $\frac{\gamma-\alpha x}{\beta}$), β$\neq$0 ή ($\frac{\gamma-\beta y}{\alpha}$,y), α$\neq$0 δίνοντας μια τιμή στο x ή το y αντίστοιχα.

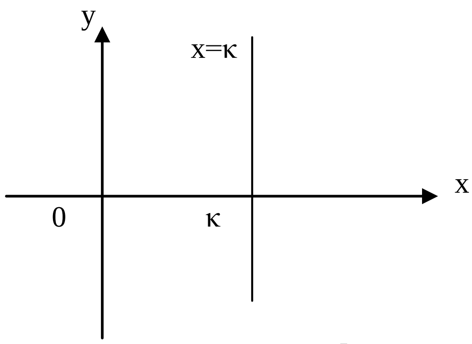
γ. Το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης αx+βy=γ, α$\neq$0 ή β$\neq$0 παριστάνει **ευθεία**. Δυο ειδικές περιπτώσεις της γραμμικής εξίσωσης αx+βy=γ, α$\neq$0 ή β$\neq$0 (1) είναι οι εξής:

i. Αν α=0 τότε η (1) δίνει βy=γ$\Leftrightarrow$ y=$\frac{\gamma}{\beta}$ δηλαδή γενικά y=κ.
Αυτή είναι η εξίσωση της σταθερής συνάρτησης f(x)=κ και παριστάνει ευθεία // στον άξονα xx’ που τέμνει τον yy’ στο σημείο (0,κ).



π.χ. Οι ευθείες y=5, y=-$\frac{1}{3}$, y=2,8 είναι // στον xx'.

ii. Αν β=0 τότε η (1) δίνει αx=γ $\Leftrightarrow$ x=$\frac{\gamma}{\alpha}$ δηλαδή γενικά x=κ. Αυτή παριστάνει ευθεία // στον άξονα yy' που τέμνει τον xx' στο σημείο (κ,0). Η ευθεία αυτή **δεν** είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης διότι το κ αντιστοιχίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς.



π.χ. Οι ευθείες x=2, x=-1,7, x=$\frac{5}{4}$ είναι // στον yy'.

Β. Σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους:

Όταν ζητάμε την κοινή λύση (ή τις κοινές λύσεις) δυογραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους λέμε ότι έχουμε ένα **σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους**. Η γενική μορφή ενός τέτοιου συστήματος είναι η εξής: $\begin{cases} \alpha\chi + \beta\psi = \gamma \\ \alpha`\chi + \beta`\psi = \gamma` \end{cases}$

Το διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (x,y) που επαληθεύει ταυτόχρονα και τις δυο εξισώσεις λέγεται **λύση του συστήματος**. Η διαδικασία εύρεσης της λύσης λέγεται **επίλυση του συστήματος**.
Ο έλεγχος που κάνουμε προκειμένου να δούμε εάν η μλύση που βρήκαμε είναι η σωστή λέγεται **επαλήθευση**.

α. Μέθοδος της αντικατάστασης:
Προκειμένου να λύσουμε ένα σύστημα με την μέθοδο της αντικατάστασης εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία:

1^{ov}: Λύνουμε μια από τις δυο εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο. Συνήθως λύνουμε ως προς τον άγνωστο που έχει τον "μικρότερο" συντελεστή.
2^{ov}: Αντικαθιστούμε την παράσταση του αγνώστου αυτού στη δεύτερη εξίσωση.
3^{ov}: Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου.
4^{ov}: Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα (Σ) $\begin{cases} x+y=12 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$

Το αρχικό σύστημα (Σ) γράφεται ισοδύναμα (Σ`) $\begin{cases} x=12-y \\ 5x-2y=4 \end{cases}$.

Αντικαθιστούμε το x στην δεύτερη εξίσωση και βρίσκουμε το y:
5(12-y)-2y=4 $\Leftrightarrow$ 60-5y-2y=4 $\Leftrightarrow$ 7y=56 $\Leftrightarrow$ y=8.
Αντικαθιστούμε το y στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε το x:
x=12-8 $\Leftrightarrow$ x=4.
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (4,8).

β. Μέθοδος αντίθετων συντελεστών ή απαλοιφής:
Προκειμένου να λύσουμε ένα σύστημα με την μέθοδο της απαλοιφής εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία:

1^{ov}: Φέρνουμε τις δυο εξισώσεις του συστήματος στη μορφή αx+βy=γ φροντίζοντας να είναι τα x κάτω από τα x, τα y κάτω από τα y και στα δεύτερα μέλη οι γνωστοί όροι.
2^{ov}: Πολλαπλασιάζουμε τη μια ή και τις δυο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό ώστε οι συντελεστές του x ή του y στις δυο εξισώσεις να είναι αντίθετοι αριθμοί.
3^{ov}: Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις οπότε απαλείφεται ο ένας άγνωστος και προκύπτει εξίσωση ως προς τον άλλο άγνωστο μόνο, την οποία επιλύουμε.
4^{ov}: Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις δυο αρχικές εξισώσεις βρίσκοντας έτσι και τον άλλο άγνωστο.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα (Σ) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x-y=3 \end{cases}$

Θα κάνουμε απαλοιφή του y.

Το (Σ) ισοδύναμα θα πάρει μορφή $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x-y=3 \quad (\cdot 3) \end{cases} \Leftrightarrow$ (Σ`) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 3x-3y=9 \end{cases}$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του (Σ`) και παίρνουμε:
5x=15 $\Leftrightarrow$ x=3.
Για x=3 από την x-y=3 παίρνουμε y=0.
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (3,0).

<u>ΣΧΟΛΙΑ:</u>

1. Σύστημα αδύνατο:

Να λυθεί το σύστημα (Σ)$\begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x+4y=-2 \end{cases}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της απαλοιφής έχουμε ότι: (Σ)$\begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x+4y=-2 \ \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$ (Σ`)$\begin{cases} 2x+4y=3 \\ -2x-4y=2 \end{cases}$ και με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε 0x+0y=5.

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα και το αρχικό σύστημα (Σ) δεν έχει λύσεις και λέμε ότι είναι **αδύνατο**.

α. Γεωμετρικά ένα σύστημα αδύνατο παριστάνεται με δυο ευθείες διαφορετικές μεταξύ τους αλλά παράλληλες.

β. Δυο γραμμικές εξισώσεις παριστάνουν παράλληλες ευθείες όταν διαφέρουν μόνο ως προς τον σταθερό όρο.

2. Σύστημα με άπειρες λύσεις ή αόριστο:

Να λυθεί το σύστημα (Σ)$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της απαλοιφής έχουμε ότι: (Σ)$\begin{cases} x-y=2 \ \cdot(-2) \\ 2x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$ (Σ`)$\begin{cases} -2x+2y=-4 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$ και με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε 0x+0y=0.

Η τελευταία εξίσωση αληθεύει για κάθε x και y. Άρα και το αρχικό σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις.

3. Δυο γραμμικά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ον}: Λύνουμε την μια εξίσωση του συστήματος ως προς ένα άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.

2^{ον}: Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε`) του συστήματος π.χ. την (ε) με την εξίσωση λ(ε)+λ΄(ε`) που προκύπτει αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με λ$\neq 0$ προσθέσουμε τα μέλη της (ε΄) πολλαπλασιασμένα με λ`$\neq 0$. Η εξίσωση λ(ε)+λ`(ε`) λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των (ε) και (ε`). Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα τα συστήματα (Σ) και (Σ`) είναι ισοδύναμα.

γ. <u>Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος:</u>

Μια διάταξη αριθμών (ή παραστάσεων) σε δυο γραμμές και δυο στήλες που περικλείεται από δυο παράλληλες γραμμές ονομάζεται **ορίζουσα 2^{ης} τάξης**.

π.χ. $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$

Ορίζουμε ότι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$=αδ-βγ

Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι

$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$=1(-2)-6α=-2-6α.

Στο σύστημα (Σ) $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha` x+\beta` y=\gamma` \end{cases}$ αντιστοιχούν τρεις ορίζουσες:

α. D=$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha` & \beta` \end{vmatrix}$=αβ`-α`β που έχει ως στοιχεία τους συντελεστές των αγνώστων και λέγεται **ορίζουσα του συστήματος**.

β. $D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma` & \beta` \end{vmatrix}$=γβ`-γ`β η οποία προκύπτει από την D αν στην στήλη των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους.

γ. $D_\psi=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha` & \gamma` \end{vmatrix}$=αγ`-α`γ η οποία προκύπτει από την D αν στην στήλη των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους.

Για το σύστημα (Σ) αποδεικνύεται ότι:

i. Αν $D\neq 0$ έχει **μοναδική** λύση την x=$\frac{D_x}{D}$, y=$\frac{D_\psi}{D}$

ii. Αν D=0 και $D_x \neq 0$ ή $D_\psi \neq 0$ είναι **αδύνατο**.

iii. Αν D= D_x = D_ψ =0 έχει **άπειρες λύσεις** εκτός αν οι συντελεστές των αγνώστων είναι όλοι μηδέν ενώ ένας τουλάχιστον από τους σταθερούς όρους είναι διάφορος του μηδενός οπότε το σύστημα είναι **αδύνατο**.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα (Σ)$\begin{cases} 3x-5=2y \\ x+3y=1 \end{cases}$

Το (Σ) γράφεται ισοδύναμα (Σ`)$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=1 \end{cases}$ για το οποίο έχουμε:

D=$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$=$3^2$ -1(-2)=11$\neq 0$

$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$=5·3-1(-2)=17 και

$D_\psi=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=3-5=-2

Επειδή $D\neq 0$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την x=$\frac{17}{11}$, y=-$\frac{2}{11}$

<u>ΣΧΟΛΙΟ:</u>
Όταν σε ένα σύστημα οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι δεν είναι όλοι συγκεκριμένοι αριθμοί αλλά εξαρτώνται από μια παράμετρο το σύστημα λέγεται **παραμετρικό**. Η διαδικασία που

κάνουμε προκειμένου να δούμε πότε το σύστημα έχει μια λύση, πότε έχει άπειρες λύσεις και πότε είναι αδύνατο λέγεται **διερεύνηση**.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα (Σ) $\begin{cases} 2x+\lambda y=\lambda-2 \\ \lambda x+2y=4\lambda-8 \end{cases}$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

D= $\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}$ =4-λ^2 =-(λ-2)(λ+2)

D_x = $\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ 4\lambda-8 & 2 \end{vmatrix}$ =2(λ-2)-λ(4λ-8)=2(λ-2)-4λ(λ-2)=(2-4λ)(λ-2)=-2(λ-2)(2λ-1)

D_ψ = $\begin{vmatrix} 2 & \lambda-2 \\ \lambda & 4\lambda-8 \end{vmatrix}$ =2(4λ-8)-λ(λ-2)=8(λ-2)-λ(λ-2)= -(λ-2)(λ-8)

Βρίσκουμε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι D=0:
D=0 $\Leftrightarrow$ -(λ-2)(λ+2)=0 $\Leftrightarrow$ λ=2 ή λ=-2.
Εξετάζουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου λ:

i. Αν D $\neq$ 0 δηλαδή λ $\neq$ 2 και λ $\neq$ -2 το (Σ) έχει y μοναδική λύση την
x= $\frac{D_x}{D}=\frac{-2(\lambda-2)(2\lambda-1)}{-(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{2(2\lambda-1)}{\lambda+2}$ και y= $\frac{D_\psi}{D}=\frac{-(\lambda-2)(\lambda-8)}{-(\lambda-2)(\lambda+2)}=\frac{\lambda-8}{\lambda+2}$.

ii. Αν λ=2 το αρχικό (Σ) γίνεται (Σ`) $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ και έχει άπειρες λύσεις.

Επειδή 2x+2y=0 $\Leftrightarrow$ x+y=0 $\Leftrightarrow$ y=-x έχουμε ότι οι άπειρες λύσεις είναι τα ζεύγη της μορφής (x,-x), x $\in$ R (ή ισοδύναμα (κ,-κ), κ $\in$ R).

iii. Αν λ=-2 το αρχικό (Σ) γίνεται (Σ``) $\begin{cases} 2x-2y=-4 \\ -2x+2y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-\psi=-2 \\ \chi-\psi=8 \end{cases}$ το οποίο είναι αδύνατο.

Γ. Γραμμικό σύστημα 3x3:

Να λυθεί το σύστημα: (Σ) $\begin{cases} \chi-\psi-\omega=6 & (1) \\ \chi-2\psi-3\omega=10 & (2) \\ 5\chi+6\psi+\omega=2 & (3) \end{cases}$

Ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους λύνεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος: Από τις δυο πρώτες εξισώσεις φτιάχνουμε ένα σύστημα ως προς x και y, το λύνουμε και τις τιμές του x και y που βρίσκουμε τις αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση.

Έτσι έχουμε: $\begin{cases} x-y=6+\omega \\ x-2y=10+3\omega \end{cases}$ από οπού παίρνουμε x=2-ω (4) και y=-2ω-4 (5).

Αντικαθιστούμε τώρα τις (4) και (5) στην (3) και παίρνουμε: 5(2-ω)+6(-2ω-4)+ω=2 $\Leftrightarrow$ ω=-1.
Για ω= -1 από την (4) έχουμε ότι: x=2-(-1)=3.

Για ω=-1 από την (5) έχουμε ότι: y=-2(-1)-4=-2.
Άρα η λύση του (Σ) είναι η τριάδα (x,y,ω)=(3,-2,-1).

2ος: Από τις εξισώσεις (1) και (2) απαλείφουμε έναν άγνωστο, για παράδειγμα τον x:

$$\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ x-2y-3\omega=10 \quad \cdot(\text{-}1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-\omega=6 \\ -x+2y+3\omega=-10 \end{cases}$$ και άρα y+2ω=-4.

Από τις εξισώσεις (1) και (3) απαλείφουμε τον **ίδιοάγνωστο**:

$$\begin{cases} x-y-\omega=6 \quad \cdot(\text{-}5) \\ 5x+6y+\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y+5\omega=-30 \\ 5x+6y+\omega=2 \end{cases}$$ και άρα 11y+6ω=-28.

Το αρχικό (Σ) γίνεται (Σ`) $\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ y+2\omega=-4 \\ 11y+6\omega=-28 \end{cases}$. Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις του (Σ`) έχουμε ότι:

$$\begin{cases} y+2\omega=-4 \quad \cdot(\text{-}11) \\ 11\mathrm{y}+6\omega=\text{-}28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11y-22\omega=44 \\ 11y+6\omega=-28 \end{cases}$$ και άρα -16ω=16 $\Leftrightarrow$ ω=1.

Άρα το (Σ`) γίνεται (Σ``) $\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ y+2\omega=-4 \\ \omega=-1 \end{cases}$.

Για ω=-1 από την δεύτερη εξίσωση του (Σ``) παίρνουμε y=-2.
Για ω=-1 και y=-2 από την πρώτη εξίσωση του (Σ``) παίρνουμε x=3.
Άρα η λύση του (Σ) είναι η τριάδα (x,y,ω)=(3,-2,-1).

<u>ΣΧΟΛΙΑ:</u>

1. Ένα σύστημα σαν το (Σ``) όπου η πρώτη εξίσωση περιέχει και τους τρεις αγνώστους, η δεύτερη εξίσωση περιέχει μόνο τους δυο αγνώστους και η τρίτη εξίσωση περιέχει μόνο τον ένα άγνωστο λέγεται **κλιμακωτό**.

2. Όταν οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι όλοι ίσοι με μηδέν το σύστημα λέγεται **ομογενές**.

Ένα ομογενές σύστημα μπορεί να έχει:

α. Μόνο τη μηδενική λύση (0,0,0).
β. Άπειρες λύσεις στις οποίες περιλαμβάνεται και η μηδενική. Άρα ένα ομογενές σύστημα έχει **πάντα** για λύση την (0,0,0).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 5x-2y=3 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+1}{3}=2 \\ \dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{y+4}{2}=4 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2} \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} 0,3x+0,1y=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{2y-x}{2}=1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6} \end{cases}$

2. Ομοίως τα συστήματα:

α. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=4 \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{15}{y}=1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 2|x|-3|y|=2 \\ |x|+2|y|=8 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=3 \\ 3\sqrt{x}+4\sqrt{y}+11=0 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} 2|x+1|+|y-1|=7 \\ |y-1|-|x+1|=1 \end{cases}$

3. Ομοίως τα συστήματα:

α. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} 3x+2y-21=0 \\ (2x-y)(x+3y)=0 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} x+y=8 \\ |x-y-1|=5 \end{cases}$

4. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\alpha-1)x-(\beta+1)y=-\alpha-\beta \\ (\beta+1)x+\beta y=3\alpha+3 \end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές των α και β, ώστε το σύστημα να έχει λύση την: $(x,y)=(2,3)$.

5. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 14 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως την μια πλευρά κατά 2 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδό του αυξάνει κατά 11 cm^2. Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

6. Το άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού είναι 7. Αν εναλλάξουμε την θέση των ψηφίων, παίρνουμε αριθμό κατά 9 μικρότερο. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

7. Να βρείτε ένα κλάσμα τέτοιο ώστε αν προσθέσουμε το 1 και στους δυο όρους του να γίνεται ίσο με $\dfrac{2}{3}$, ενώ αν αφαιρέσουμε το 2 από τους όρους του, να γίνεται ίσο με $\dfrac{1}{2}$.

8. Σε ένα πάρκινγκ βρίσκονται συνολικά 60 αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες. Αν έχουν συνολικά 200 τροχούς, πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσυκλέτες.

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ 9 & x+3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **β.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x^2-9 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ **γ.** $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-x \\ -1 & x-\lambda \end{vmatrix} = 0$

10. Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

α. $\begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} -x + \lambda y = \lambda - 1 \\ -2x + \lambda^2 y = \lambda \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} (\lambda+2)x + \lambda y = 1 \\ 3x + (2-\lambda)y = 1 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} (\lambda-1)x - \lambda y = \lambda \\ -2x + (\lambda+2)y = \lambda - 6 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} (\mu^2+1)x + (\mu^2-1)y = \mu \\ (\mu+1)x + (\mu-1)y = \mu^2 \end{cases}$

11. Για ποια τιμή του $\in R$, το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1)y = 7 \\ 2x + (3\lambda - 1)y = 2\lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο;

12. Να βρείτε την μοναδική λύση του συστήματος $\begin{cases} x - \lambda y = \lambda^2 + 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2 + 1 \end{cases}$

13. Για ποια τιμή του $\lambda \in R$, το σύστημα $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (\lambda^2 - 8)y = 6 - \lambda \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις;

14. Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα $\begin{cases} \kappa x - (\lambda - \kappa)y = \kappa + \lambda \\ \dfrac{\kappa + \lambda}{2} x - 2(\lambda - \kappa)y = 4\lambda - 1 \end{cases}$ έχει λύση την $(x, y) = (6, 1)$, τότε έχει άπειρες λύσεις.

15. Για ποια τιμή του $\lambda \in R$, το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda+3)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$ έχει:

α. μοναδική λύση
β. καμία λύση
γ. μοναδική λύση (x_0, y_0) τέτοια ώστε $x_0 + y_0 = 1$
δ. άπειρες λύσεις

16. Για ποια τιμή του $\lambda \in R$, το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \lambda x + 3y = 5 \end{cases}$ έχει λύση η οποία επαληθεύει και την εξίσωση $x + 5y = 17$

17. Για ποιες τιμές των λ και μ οι ευθείες με εξισώσεις $(3\lambda-1)x+(\mu+1)y=5\mu+\lambda$ και $\lambda x+(2\mu-3)y=2\mu-\frac{7}{2}\lambda$, τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},3\right)$.

18. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $\begin{vmatrix}-1-x & 2+y\\ -3+x & 5-y\end{vmatrix}=0$ και (ε_2): $y-\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}\cdot x+1=0$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

19. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases}2x+y-z=2\\ 4x-y-3z=-2\\ 2x+2y-7=9\end{cases}$ **β.** $\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-3y+z=0\\ 3x+y+z=5\end{cases}$ **γ.** $\begin{cases}x+y-2z=3\\ 3x+2y-z=12\\ 8x-4y+5z=21\end{cases}$

20. Ομοίως τα συστήματα:

α. $\begin{cases}9x+2y-7\omega=2\\ x-4y-\omega=-2\\ 9x-17y-8\omega=10\end{cases}$ **β.** $\begin{cases}x+4y+4\omega=38\\ 2x-2y+3\omega=26\\ x-2y+\omega=8\end{cases}$ **γ.** $\begin{cases}x+3y+5z=0\\ x-y+z=0\\ 4x-y+7z=0\end{cases}$

21. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$ που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2), Β(-2,11) και Γ(3,16).

22. Ένας καναπές και μια πολυθρόνα σε περίοδο εκπτώσεων κοστίζουν 350 €. Ο καναπές και ένα τραπέζι κοστίζουν 330 €. Η πολυθρόνα και το τραπέζι κοστίζουν 180 €. Να υπολογίσετε πόσο κοστίζει το καθένα.

2. Μη γραμμικά συστήματα:

Ένα σύστημα λέγεται μη γραμμικό αν σε κάποια από τις εξισώσεις του εμφανίζονται κάποιοι από τους x^2, y^2 ή $x\cdot y$.

Για να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα κάνουμε την εξής διαδικασία:

1ον: Αν το σύστημα έχει μια γραμμική εξίσωση τότε το λύνουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Δηλαδή λύνουμε την γραμμική εξίσωση ως προς τον ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε την τιμή του στην άλλη εξίσωση.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Από την 1η εξίσωση έχουμε $x+y=7 \Leftrightarrow y=7-x$.

Αντικαθιστώντας στην 2η εξίσωση παίρνουμε $x^2+(7-x)^2=25 \Leftrightarrow x^2+49+x^2-14x=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0$.

Λύνοντας την τελευταία βρίσκουμε $x_1=4$ και $x_2=3$.

Για $x_1=4$ η $x+y=7$ δίνει $y_1=3$ και για $x_2=3$ δίνει $y_2=4$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (4,3) και (3,4).

2ον: Αν και οι δυο εξισώσεις του συστήματος είναι β` βαθμού ως προς κάθε άγνωστο τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό το μετατρέπουμε σε γραμμικό.

π.χ. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

Θέτοντας $x^2=\alpha$ και $y^2=\beta$ το σύστημα γίνεται γραμμικό $\begin{cases} \alpha+\beta=25 \\ \alpha-\beta=5 \end{cases}$. Η επίλυση του τελευταίου συστήματος δίνει α=15 και β=10. Άρα θα έχουμε $x^2=15$ και $y^2=10$ από όπου παίρνουμε $x=\pm\sqrt{15}$ και $y=\pm\sqrt{10}$.

Για $x=\sqrt{15}$ από την 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε $y=\pm\sqrt{10}$ δηλαδή τα ζεύγη ($\sqrt{15}$, $\sqrt{10}$) και ($\sqrt{15}$,-$\sqrt{10}$) είναι δυο λύσεις του συστήματος.

Για $x=-\sqrt{15}$ από την 1η εξίσωση του συστήματος έχουμε $y=\pm\sqrt{10}$ δηλαδή τα ζεύγη (-$\sqrt{15}$, $\sqrt{10}$) και (-$\sqrt{15}$,-$\sqrt{10}$) είναι επίσης λύσεις του συστήματος

3ον: Αν και οι δυο εξισώσεις του συστήματος δεν είναι β` βαθμού ως προς κάθε άγνωστο ξεχωριστά τότε το σύστημα λύνεται είτε με τη μέθοδο της αντικατάστασης είτε με διάφορα τεχνάσματα που βασίζονται σε βασικές αλγεβρικές πράξεις.

π.χ. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y=3x^2$ και της ευθείας $12x-3y=4$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των δυο σχημάτων αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Θέτουμε $y=3x^2$ στην 2η εξίσωση η οποία γίνεται $12x-3(3x^2)=4 \Leftrightarrow 9x^2-12x+4=0$.Η επίλυση της τελευταίας δίνει $x=\frac{2}{3}$ (έχει Δ=0).

Άρα από την y=3x^2 για x=$\frac{2}{3}$ παίρνουμε y=$\frac{4}{3}$.

Συνεπώς η παραβολή και η ευθεία που μας δόθηκαν έχουν ένα κοινό σημείο το ($\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$).

ΣΧΟΛΙΑ:

Σε ασκήσεις όπως η παραπάνω ισχύουν τα εξής:

1. Αν Δ=0, η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) στο οποίο εφάπτονται.
2. Αν Δ > 0, η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δυο σημεία.
3. Αν Δ < 0 η ευθεία δεν τέμνει την παραβολή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

1. Να λυθούν τα συστήματα:

α. $\begin{cases} x+y^2=7 \\ xy^2-12=0 \end{cases}$ **β.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$ **γ.** $\begin{cases} xy=2 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$

δ. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=4 \\ x+y=4 \end{cases}$ **ε.** $\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ **ζ.** $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y=-1 \end{cases}$

η. $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής $y=-2x^2$ και της ευθείας $3x-y-2=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Μονοτονία-ακρότατα-συμμετρίες συνάρτησης:

Α. Μονοτονία συνάρτησης:

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Μια συνάρτηση που είναι **μόνο** γνησίως αύξουσα ή **μόνο** γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ αν α<0 τότε

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β. Ακρότατα συνάρτησης:

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** αν: $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** αν: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Το $x_0 \in A$ όπου η f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστοή ελάχιστο, λέγεται **θέση του (ολικού) μεγίστου ή ελαχίστου**. Η αντίστοιχη τιμή $f(x_0)$ ονομάζεται **μέγιστο** ή **ελάχιστο** αντίστοιχα της συνάρτησης f.

2. Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της συνάρτησης f, λέγονται **ακρότατα** της f.

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μόνο μέγιστο, μόνο ελάχιστο ή και τα δυο ή και κανένα από τα δυο.

Γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **άρτια** αν:

- για κάθε $x \in A$ και το $-x \in A$ και
- $f(-x) = f(x)$