ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο –ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο –Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο –ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o} - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

§ 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος .

   i. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
   ii. Δύο ομόρροπα διανύσματα είναι συγγραμμικά .
   iii. Αν $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, τότε ισχύει ότι $\vec{a}=\vec{b}$.
   iv. Αν ισχύει ότι $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{MB}|$,τότε το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
   v. Αν ισχύει $\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ τότε ισχύει και ότι $\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\overrightarrow{\Lambda\mathrm{N}}$.
   vi. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει ότι $\vec{0}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$.
   vii. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=180^{o}$.

2. Δίνεται πλάγιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο συμμετρίας του. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος .

   i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
   ii. $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$
   iii. $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}$
   iv. $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}|$
   v. $|\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}|=|\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}|$
   vi. $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}$

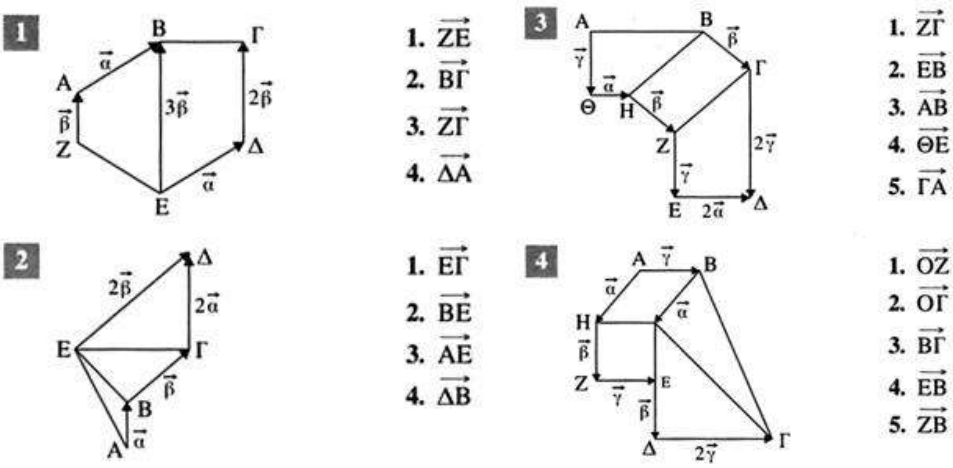
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση τη πλευρά ΒΓ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος .

   i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$
   ii. $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}|$
   iii. $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$
   iv. $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma})}=\widehat{(\overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}},\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma})}$

4. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ ισχύει ότι $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}=50^{o}$ να βρείτε τις γωνίες : α. $\widehat{(-\vec{\alpha},\vec{\beta})}$ β. $\widehat{(-\vec{\alpha},-\vec{\beta})}$

§ 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Να βρεθούν τα διανύσματα στα αντίστοιχα σχήματα.



2. Να απλοποιηθούν τα διανυσματικά αθροίσματα:

i.	$\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}$	v.	$\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{\Gamma O}$
ii.	$\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BA}$	vi.	$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{MN}$
iii.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{A\Gamma}$	vii.	$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{M\Gamma}$
iv.	$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}$	viii.	$\overrightarrow{M\Sigma}-\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{MO}$

3. Να απλοποιηθούν τα αθροίσματα με τη μέθοδο των διανυσματικών ακτινών:

i.	$\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{PB}$	vi.	$\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Sigma}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BN}$
ii.	$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{NB}$	vii.	$\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{B\Lambda}-\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{P\Gamma}$
iii.	$\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{\Gamma P}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{\Gamma M}$	viii.	$\overrightarrow{\Gamma P}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{\Gamma K}-\overrightarrow{AP}$
iv.	$\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{\Gamma\Sigma}+\overrightarrow{NA}$	ix.	$\overrightarrow{\Sigma B}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{\Sigma M}-\overrightarrow{NB}$
v.	$\overrightarrow{\Sigma P}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Sigma\Gamma}+\overrightarrow{MA}$		

4. Να απλουστευτούν τα διανυσματικά αθροίσματα:

i.	$\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}$	iii.	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{\Gamma\Sigma}-\overrightarrow{A\Sigma}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{M\Sigma}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{\Sigma B}$
ii.	$\overrightarrow{\Sigma A}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{A\Delta}$	iv.	$\overrightarrow{\Gamma N}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{N\Sigma}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{MP}$

5. Να αποδειχτούν οι διανυσματικές ισότητες:
   i. $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$
   ii. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Delta}$
   iii. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+3\overrightarrow{OM}$
   iv. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{A\Delta}$

6. Αν $\vec{u} = 5\vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$, να γραφούν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

7. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο,Α συμπίπτουν.

8. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ.Αν ισχύουν: $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ,Ν ταυτίζονται.

10. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{ZE}}$ να αποδείξετε ότι το Β είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

11. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ ένα σημείο για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}$.Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

12. Έστω Α,Β,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία μεταξύ τους για τα οποία ισχύει ότι : $\overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{H\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} - \overrightarrow{\mathrm{EZ}}$.Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλλήλόγραμμο.

13. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}}$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ .Να προσδιορίσετε σημείο Μ ,ώστε να ισχύει ότι : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

15. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ .Να προσδιορίσετε σημείο Μ ,ώστε να ισχύει ότι : $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

16. Εξωτερικά ενός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ,ΒΓΖΗ και ΑΓΘΙ. Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{\mathrm{\Delta H}} + \overrightarrow{\mathrm{Z\Theta}} + \overrightarrow{\mathrm{IE}} = \vec{0}$

17. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν : $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \geq 5$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα είναι ομόρροπα.

18. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι : $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 \le 5\left|\vec{\alpha}\right|^2+\frac{5}{4}\left|\vec{\beta}\right|^2$

19. Δίνονται τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\left|\vec{\alpha}\right|=1$,
$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=4$ και $\left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|=8$.Να βρείτε : α. $\left|\vec{\beta}\right|$ β. $\left|\vec{\gamma}\right|$ γ. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right|$.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ με : $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$ και $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=3$.Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Δ και Ε ισχύει ότι:
$1\le\left|\overrightarrow{\Delta E}-\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Delta A}\right|\le 5$.

21. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που ικανοποιούν τη σχέση : $\left|\overrightarrow{M\Delta}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta B}\right|-\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{\Gamma B}\right|=0$

22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που ικανοποιούν τη σχέση : $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Delta}\right|=2$

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που ικανοποιούν τη σχέση: $\left|\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{A\Gamma}\right|+\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA}\right|=6$.

24. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς ΓΔ.Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|$

§ 1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Να αποδειχτεί με σχέση της μορφής $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά όταν ισχύουν οι ισότητες:

   i. $4\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma A}-3\overrightarrow{BA}$
   ii. $\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{\Gamma A}-3\overrightarrow{AB}$
   iii. $3\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{\Gamma M}$
   iv. $2\overrightarrow{A\Gamma}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{B\Gamma}$
   v. $7\overrightarrow{\Gamma A}=4\overrightarrow{\Gamma B}+3\overrightarrow{BA}$
   vi. $3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{\Gamma A}=0$
   vii. $8\overrightarrow{\Gamma B}-5\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{\Gamma A}$
   viii. $8\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{A\Gamma}+5\overrightarrow{\Gamma B}$
   ix. $7\overrightarrow{M\Gamma}+5\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{\Gamma A}+7\overrightarrow{MB}$

2. Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}$ να δειχτεί η ισότητα $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$.

3. Αν $5\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{B\Gamma}$ να δειχτεί ότι $11\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{M\Gamma}$.

4. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά όταν ισχύει:
   α) $5\overrightarrow{A\Gamma}+12\overrightarrow{\Gamma B}-7\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, β) $7\overrightarrow{B\Gamma}+5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$

5. Να δειχτεί ότι τα σημεία Μ, Ν, Ρ είναι συνευθειακά όταν ισχύει:
   $2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AN}-3\overrightarrow{PB}$

6. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά όταν ισχύει:
   $\overrightarrow{OA}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma},\ \overrightarrow{OB}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\ \kappa\alpha\iota\ \overrightarrow{O\Gamma}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-4\vec{\gamma}$

7. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά όταν ισχύει:
   $\overrightarrow{OA}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma},\ \overrightarrow{OB}=15\vec{\alpha}+7\vec{\beta}+\vec{\gamma},\ \overrightarrow{O\Gamma}=7\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

8. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά όταν ισχύει:
   $\overrightarrow{OA}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma},\ \overrightarrow{OB}=5\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma},\ \overrightarrow{O\Gamma}=17\vec{\alpha}-9\vec{\beta}+7\vec{\gamma}$

9. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα και ισχύουν:
   $\overrightarrow{OA}=3\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta},\ \overrightarrow{OB}=\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta},\ \overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ να βρεθεί ο αριθμός κ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

10. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι ανά δύο παράλληλα να αποδειχτούν οι συνεπαγωγές:

i. $\left\{\left(\vec{\gamma}-6\vec{\alpha}\right) \parallel \vec{\beta} \text{ και } \left(\vec{\gamma}-7\vec{\beta}\right) \parallel 2\vec{\alpha}\right\} \Rightarrow \vec{\gamma}=6\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$

ii. $\left\{\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) \parallel 2\vec{\gamma} \text{ και } \left(\vec{\alpha}-6\vec{\gamma}\right) \parallel 2\vec{\beta}\right\} \Rightarrow \vec{\alpha}-\vec{\beta}=6\vec{\gamma}$

iii. $\left\{\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right) \parallel \vec{\beta} \text{ και } \left(2\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right) \parallel 2\vec{\gamma}\right\} \Rightarrow \vec{\alpha}=2\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

iv. $\left\{\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right) \parallel 2\vec{\beta} \text{ και } \left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right) \parallel 3\vec{\gamma}\right\} \Rightarrow \vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$

11. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα και ισχύουν: $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \overrightarrow{ΟΒ}=\mu\vec{\alpha}-\vec{\beta}, \overrightarrow{ΟΓ}=2\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}$ και $\kappa+3=\mu$ να βρεθούν οι αριθμοί κ και μ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά.

12. Να δειχτεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά όταν και μόνον όταν υπάρχει αριθμός λ ώστε να ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{ΟΑ}=\lambda\overrightarrow{ΟΒ}+(1-\lambda)\overrightarrow{ΟΓ}$.

13. Αν ισχύει $(\kappa+2)\overrightarrow{ΜΑ}+3\overrightarrow{ΜΒ}=(\kappa+5)\overrightarrow{ΜΓ}$,να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

14. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Μ και Ν ταυτίζονται όταν ισχύει:
α) $\overrightarrow{ΡΣ}-\overrightarrow{ΡΚ}=\overrightarrow{ΜΣ}-\overrightarrow{ΝΚ}$, β) $\overrightarrow{ΒΜ}+\overrightarrow{ΓΑ}=\overrightarrow{ΓΝ}+\overrightarrow{ΒΑ}$

15. Αν ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{ΒΜ}+\overrightarrow{ΡΑ}+\overrightarrow{ΣΒ}=\overrightarrow{ΓΝ}+\overrightarrow{ΡΓ}+\overrightarrow{ΣΑ}$ να αποδειχτεί ότι τα σημεία Μ και Ν ταυτίζονται.

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν $\overrightarrow{ΜΑ}+\overrightarrow{ΜΒ}+\overrightarrow{ΜΓ}=\overrightarrow{ΜΔ}$ να αποδειχτεί ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Β.

17. Αν ισχύει: $2\overrightarrow{ΑΛ}+3\overrightarrow{ΒΛ}+2\overrightarrow{ΜΒ}=\overrightarrow{ΑΚ}+\overrightarrow{ΑΜ}+\overrightarrow{ΒΚ}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΚΛ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{ΜΛ}$.

18. Εάν $3\overrightarrow{ΒΔ}-\overrightarrow{ΓΑ}=3\overrightarrow{ΒΓ}-\overrightarrow{ΔΒ}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα ΑΒ και ΓΔ είναι αντίρροπα.

19. Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{v}=\lambda\vec{a}+(\lambda+1)\vec{\beta}$ και $\vec{u}=(\lambda+2)\vec{a}+(\lambda+5)\vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα.Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα.

20. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}=2\overrightarrow{ΜΑ}+3\overrightarrow{ΜΒ}-\overrightarrow{ΜΓ}-4\overrightarrow{ΜΔ}$ είναι σταθερό.

21. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{\Gamma M}-3\overrightarrow{\Delta M}-6\overrightarrow{MA}$ είναι ανεξάρτητο του σημείου Μ.

22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\delta}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.Αν ισχύει κ+λ+μ=0,να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ , το διάνυσμα $\vec{u}=\kappa\overrightarrow{MA}+\lambda\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

24. Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ *και* $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$ να βρεθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ όταν:
α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma M}$, β) $\overrightarrow{\Gamma M}=\overrightarrow{MB}$, γ) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{M\Gamma}$.

25. Αν $\kappa\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ με $\kappa\neq\lambda$ για τυχαίο Ο, να αποδειχτεί ότι: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\kappa\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}}{\kappa-\lambda}$

26. Αν $\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$, να βρεθούν οι αριθμοί κ και λ, ώστε για τυχαίο σημείο Ο να ισχύει: $8\overrightarrow{AO}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$. Να αποδειχτεί η συνεπαγωγή:
$$\left.\begin{cases}\kappa\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\\ \kappa+\lambda+\mu=0\end{cases}\right\}\Rightarrow \kappa\overrightarrow{\Sigma A}+\lambda\overrightarrow{\Sigma B}+\mu\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\vec{0}$$

27. Αν $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{\Delta B}$ και $(4-x)\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{BA}=(x-3)\overrightarrow{B\Gamma}$ να δειχτεί ότι είναι $x=\lambda+4,(B\neq\Delta)$.

28. Αν $\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa\overrightarrow{B\Delta}$ με $B\neq\Delta$ και $\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Delta A}=(x-2)\overrightarrow{\Delta B}$ να δειχτεί ότι είναι $x=\kappa+3$.

29. Αν τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά ,να βρείτε τον $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει: $x\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{A\Delta}=x\overrightarrow{B\Gamma}+2\overrightarrow{\Delta B}$.

30. Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ,Δ, με $B\neq\Gamma$,για τα οποία ισχύει $3\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
α. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}\uparrow\downarrow\overrightarrow{B\Gamma}$.
β. Να λύσετε την εξίσωση $x\overrightarrow{\Delta\Gamma}-x\overrightarrow{AB}=(x+2)\overrightarrow{B\Gamma}$.

31. Έστω δύο γνωστά διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.Θεωρούμε επίσης το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $\frac{1}{2}\left(2\vec{x}+\vec{\beta}\right)=\frac{1}{4}\left(3\vec{x}+\vec{a}\right)$.Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$.

32. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κέντρου Κ. Αν Ο είναι τυχαίο σημείο του χώρου να δειχτεί ότι: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=4\overrightarrow{OK}$.

33. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{u}=2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}-3\overrightarrow{A\Gamma}$.

34. Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν και μόνον όταν για τυχαίο σημείο Ο ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{A}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O}\mathrm{B}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$.

35. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Αν Ε και Ζ είναι σημεία των ΑΒ και ΓΔ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{Z}}=\lambda\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ να δειχτεί ότι είναι και $\overrightarrow{\mathrm{M}\Sigma}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ όπου Σ το μέσο του ΕΖ.

36. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο σημείο Σ. Να αποδειχτούν οι ισότητες: α) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}=2\overrightarrow{\mathrm{O}\Sigma}$, β) $\overrightarrow{\Sigma\mathrm{A}}+\overrightarrow{\Sigma\mathrm{B}}+\overrightarrow{\Sigma\Delta}=2\overrightarrow{\Sigma\mathrm{O}}$.

37. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει η διανυσματική ισότητα: $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}+\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}=\vec{0}$

38. Στο επίπεδο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=2\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}+2\overrightarrow{\mathrm{M}\Delta}$

39. Στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ να προσδιοριστεί σημείο Μ ώστε να ισχύουν οι διανυσματικές ισότητες:
    i. $2\overrightarrow{\mathrm{MA}}-5\overrightarrow{\mathrm{MB}}+4\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}=\vec{0}$
    ii. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}}+7\overrightarrow{\mathrm{MB}}-9\overrightarrow{\mathrm{M}\Gamma}=\vec{0}$
    iii. $3\overrightarrow{\mathrm{MA}}+4\overrightarrow{\mathrm{MB}}=2\overrightarrow{\Gamma\mathrm{M}}$

40. Δίνεται παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΡΓ=2ΡΒ.
    α. Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\mathrm{P}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{A\mathrm{B}}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
    β. Να αποδείξετε ότι το επόμενο διάνυσμα $\vec{\nu}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma}$ είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

41. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΜΒ=2/3ΜΓ.
    α. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$.
    β. Έστω επίσης σημείο Δ για το οποίο ισχύει $15\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}=6\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}+4\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Δ,Μ είναι συνευθειακά.

42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Πάνω στα τμήματα ΑΒ,ΑΜ,ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ,Ε,Ζ αντίστοιχα ώστε: $\mathrm{A}\Delta=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$, $\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\mathrm{AM}$, $\mathrm{AZ}=\frac{1}{4}\mathrm{A}\Gamma$.Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{E}}$ και $\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσον Ζ της διάμεσου του ΑΜ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και για τα σημεία Δ,Ε ισχύει: $\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{E\Gamma}$. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

44. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ .Αν $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{M\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}}{3}$.Να βρείτε τα κ,λ ώστε να ισχύει : $\kappa\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$. Να αποδειχτεί ότι: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

47. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$

48. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: ΑΕ=ΖΓ=$\frac{1}{4}$ΑΓ α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των και $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο .

49. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$.Να βρείτε τα κ,λ ώστε να ισχύει: $\kappa\overrightarrow{A\Gamma} + \lambda\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}$.

50. Αν τα σημεία Α,Γ δεν συμπίπτουν και ισχύει: $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ να αποδείξετε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

51. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο του ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{MA} + 2\lambda\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta M} + 2\lambda\overrightarrow{AB}$.

52. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει : $\lambda\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\overrightarrow{MB}$.

53. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}\right|$.

54. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}\right|$.

§ 1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει:

   i. y=2
   ii. x= -4
   iii. $|x|=3$
   iv. $|x|<3$
   v. $-2\le y\le 1$
   vi. $y=3$ και -1<x ≤ 2

2. Δίνεται το σημείο $A\left(\lambda^2-9,\lambda^2-2\lambda\right)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το σημείο Α ανήκει α. στον x΄x β. στον y΄y.

3. Δίνεται το σημείο $A\left(\lambda,\lambda-2\right)$ με $\lambda>0$ το οποίο απέχει από τον άξονα x΄x απόσταση 3.
   α. Να βρείτε την τιμή του λ.
   β.Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς:
   i. τον άξονα x΄x
   ii. τον άξονα y΄y.
   iii. Την αρχή των αξόνων.
   iv. Τη διχοτόμο της $1^{ης}$-$3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

4. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a}\left(\lambda^2-9,|\lambda|-2\right)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : i. $\vec{\alpha}//x'x$ ii. $\vec{\alpha}//y'y$.

5. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a}\left(\lambda^2-4,\lambda^2-2\lambda\right)$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι : i. $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ii. $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

6. Να βρεθούν οι τιμές των x και y όταν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι
   α. ίσα β. αντίθετα

   i. $\overline{\alpha}=(2x-1,3),\ \overline{\beta}=(5,3y-9)$
   ii. $\overline{\alpha}=(14,5y-2),\ \overline{\beta}=(3x+5,8)$

iii. $\vec{\alpha}=(3x-\alpha,3\alpha)$, $\vec{\beta}=(5\alpha,\alpha-2y)$

iv. $\vec{\alpha}=(3x-2,4y+1)$, $\vec{\beta}=(8-2x,6-y)$

v. $\vec{\alpha}=(2x-y,3y-2)$, $\vec{\beta}=(8-x,2y-2x)$

7. Να βρεθούν οι τιμές των x και y ώστε να είναι ίσα τα διανύσματα

α) $\vec{\alpha}=(10x+5y-5,7x-8y+6),\vec{\beta}=(3x+7y+3,2x-5y+7)$

β) $\vec{\alpha}=(3x+5y+2,5x+7y-3),\vec{\beta}=(2x+4y+3,3x+5y+5)$

8. Να προσδιοριστούν τα x και y ώστε να είναι μηδενικά τα διανύσματα

α) $\vec{\alpha}=(5x-7y-1,3x+2y-13)$ β) $\vec{\beta}=\left(x^2-5x+6,x^2-7x+10\right)$

9. Να βρεθούν οι τιμές των κ και λ ώστε να είναι τα διανύσματα

α) ίσα: $\vec{\alpha}=(3\lambda-4\kappa+2,7\lambda-6\kappa+1)$, $\vec{\beta}=(\lambda-\kappa-2,2\lambda-4\kappa+2)$

β) αντίθετα: $\vec{\alpha}=(2\kappa-3\lambda+1,4\kappa+\lambda-6)$, $\vec{\beta}=(3\kappa+2\lambda-5,7\kappa-3\lambda-4)$

10. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ όταν:

i. $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(4,5)$

ii. $\mathrm{A}(3,5)$, $\mathrm{B}(6,8)$

iii. $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(2,-3)$

iv. $\mathrm{A}(3,-2)$, $\mathrm{B}(5,6)$

v. $\mathrm{A}(-2,-5)$, $\mathrm{B}(4,-2)$

vi. $\mathrm{A}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{B}(\beta,\alpha)$

vii. $\mathrm{A}(-2\alpha,\alpha)$, $\mathrm{B}(3\alpha,5\alpha)$

viii. $\mathrm{A}(7,-8)$, $\mathrm{B}(7,1)$

ix. $\mathrm{A}(3-\alpha,1-4\beta)$, $\mathrm{B}(2\alpha,-3\beta)$

11. Να βρεθεί το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ

i. $\mathrm{A}(3,2)$ $\mathrm{B}(5,-4)$
 $\mathrm{A}(3,-1)$ $\mathrm{B}(2,6)$

ii. $\mathrm{A}(-2,7)$ $\mathrm{B}(8,1)$
 $\mathrm{A}(3,6)$ $\mathrm{B}(-2,4)$

iii. $\mathrm{A}(-5,10)$ $\mathrm{B}(-3,2)$
 $\mathrm{A}(-4,3)$ $\mathrm{B}(-7,4)$

iv. $\mathrm{A}(5,-8)$ $\mathrm{B}(7,2)$
 $\mathrm{A}(9,7)$ $\mathrm{B}(-6,5)$

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μέσα Κ(-2,-2), Λ(-1,0) , Μ(2,-1) των πλευρών ΑΒ,ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να βρείτε τις κορυφές Α,Β,Γ.

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}(3,4)$, $\vec{\beta}(-2,1)$ και $\vec{\gamma}(-3,-2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

i. $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

ii. $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma}$, $\vec{v} = \vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$

iii. $\vec{u} = 4\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}$, $\vec{v} = 3\vec{\beta} - \vec{\alpha} - \vec{u}$

iv. $\vec{u} = 5\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{v} = -3\vec{\gamma} + 2\vec{\beta} - \vec{u}$

14. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

i. $\vec{u} = (-9,7)$, $\vec{\alpha} = (2,-1)$, $\vec{\beta} = (-3,2)$

ii. $\vec{u} = (1,-6)$, $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (1,4)$

iii. $\vec{u} = (-2,6)$, $\vec{\alpha} = (-2,4)$, $\vec{\beta} = (3,-5)$

iv. $\vec{u} = (1,6)$, $\vec{\alpha} = (3,-2)$, $\vec{\beta} = (2,-3)$

15. Να βρεθεί ο x ώστε να είναι παράλληλα τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$

i. $\vec{\alpha} = (x-2, x+6)$, $\vec{\beta} = (x-5, x+1)$

ii. $\vec{\alpha} = (x+1, x+3)$, $\vec{\beta} = (x+2, x+4)$

iii. $\vec{\alpha} = (x-5, x-3)$, $\vec{\beta} = (x+2, x+3)$

iv. $\vec{\alpha} = (x, 1+x)$, $\vec{\beta} = (-2, x-5)$

16. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των a και β ώστε να είναι παράλληλα μεταξύ τους τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

i. $\vec{u} = (\alpha - 1, 1+\beta)$, $\vec{v} = (1-\beta, \alpha+1)$

ii. $\vec{u} = (\alpha + 2\beta, -\beta)$, $\vec{v} = (\beta - \alpha, \alpha)$

iii. $\vec{u} = \left(\alpha, \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)$, $\vec{v} = \left(\alpha - \sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha}\right)$

iv. $\vec{u} = \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha}\right)$

17. Να εξεταστεί αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

i. $A(3,2)$ $B(4,3)$ $\Gamma(2,1)$

ii. $A(6,1)$ $B(8,3)$ $\Gamma(7,2)$

iii. $A(5,1)$ $B(3,11)$ $\Gamma(4,6)$

iv. $A(8,1)$ $B(7,9)$ $\Gamma(6,3)$

v. $A(1,12)$ $B(4,3)$ $\Gamma(2,9)$

vi. $A(-2,6)$ $B(8,10)$ $\Gamma(3,8)$

vii. $A(6,2)$ $B(-2,-1)$ $\Gamma(0,5)$

viii. $A(5,18)$ $B(1,2)$ $\Gamma(2,6)$

18. Να εξεταστεί αν τα σημεία Α(1,-1) , Β(2,1) , Γ(-1,5) είναι κορυφές τριγώνου.

19. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(-3,4)$, $\vec{\beta}=(5,-12)$, $\vec{\gamma}=(0,1)$ και $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

20. Να αποδείξετε ότι το $|\vec{\alpha}|$ του διανύσματος $\vec{\alpha}=(4\eta\mu\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta-4\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητο του θ.

21. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2,-1)$.Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$,αντίρροπο του $\vec{\alpha}$,με $|\vec{\beta}|=4\sqrt{5}$.

22. Αν $\vec{\nu}=(1,2)$,να βρείτε διάνυσμα που να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{\nu}$ και να είναι ομόρροπο του $\vec{\nu}$.

23. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων Α και Β.

i.	$A(8,5)$ $B(7,3)$	iv.	$A(-3,10)$ $B(-12,-2)$
ii.	$A(9,12)$ $B(3,4)$	v.	$A(13,-3)$ $B(-2,5)$
iii.	$A(15,-8)$ $B(-9,2)$	vi.	$A(20,-4)$ $B(-15,8)$

24. Να βρείτε το συμμετρικό του Α(1,-2) και Β (-1,3).

25. Έστω το σημείο Α(-2,3).Να βρείτε το σημείο Β όταν
    i. Α,Β είναι συμμετρικά ως προς το Κ(0,1)
    ii. Α,Β είναι αντιδιαμετρικά σημείου κύκλου με κέντρο Κ(-1,0)

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}(3,5)$, $\vec{\beta}(-2,1)$, $\vec{\gamma}(4,3)$ και το σημείο $A(8,3)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ όταν είναι: $\overline{AM}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-5\vec{\gamma}$.

27. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,-5)$, $\Gamma(-3,6)$ και τα διανύσματα $\overline{AM}=(4,2)$, $\overline{BN}=(-6,7)$, $\overline{\Gamma P}=(3,-1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Μ, Ν, Ρ.

28. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων και $\overline{OA}(3,4)$, $\overline{OB}(2,-1)$, $\overline{O\Gamma}(-3,5)$ $\overline{O\Delta}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{O\Gamma}$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ.

29. Δίνονται τα σημεία $A(5,2)$, $B(3,6)$, $\Gamma(7,4)$ *και* $\Delta(5,8)$. Να βρεθούν τα διανύσματα $\overline{AB}$, $\overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Delta}$ και να δειχτεί ότι είναι ίσα τα διανύσματα $\overline{AB}$ *και* $\overline{\Gamma\Delta}$.