ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή f'' ,για την οποία ισχύουν: $f(x)\ge f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\int_0^1\left[xf''(x)-2f'(x)\right]dx=0$.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

2. Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο[0,π].Αν g(π)=1 και ισχύει $\int_0^\pi\left[g(x)+g''(x)\right]\eta\mu x dx=3$ να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(\theta)=3\sigma\upsilon\nu\theta$.

3. Έστω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή f'' ,για την οποία ισχύει: $\int_0^{\pi/2}\left[f(x)+f''(x)\right]\sigma\upsilon\nu x dx=0$.

   i. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f'(0)=0$

   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f'(0)=f\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με συνεχή f'' στο [0,α] και $\int_0^\alpha xf''(x)dx=0$.Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

5. Έστω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή f'' και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$,για την οποία ισχύει: $\int_0^{\pi/2}\left[f(x)+f''(x)\right]\sigma\upsilon\nu x dx=2$.Να υπολογίστε το $f'(0)$.

6. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(\alpha)=f(\beta)=g(\alpha)=g(\beta)=0$ να αποδείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f''(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)g''(x)dx$.

7. Έστω F(x) αρχική συνάρτηση της $f(x)=e^{x^2}$ για την οποία ισχύει F(1)=0.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1 F(x)dx$.

8. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f'(x^3+2x)=4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε : $f(x^3+2x)=3x^4+4x^2+c$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 xf''(x)dx$.