ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO (Θ.Β)

Έστω μια συνάρτηση f ,ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].Αν:

→ Η f είναι συνεχής στο [α,β] και , επιπλέον , ισχύει

→ $f(a)\cdot f(\beta)<0$

Τότε υπάρχει ***ένα, τουλάχιστον ,*** $x_o \in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

- ✓ Δηλαδή, ***υπάρχει μία , τουλάχιστον, ρίζα*** της εξίσωσης f(x)=0 (α,β).
- ✓ Δηλαδή, ***υπάρχει μία , τουλάχιστον, ρίζα*** της συνάρτησης f στο (α,β).
- ✓ Δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_o \in(\alpha,\beta)$

Α.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Γεωμετρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής:
Το τμήμα της γραφικής παράστασης της f που περιέχεται μεταξύ των ευθειών x = α ,x = β και τέμνει τον xx΄ τουλάχιστον μία φορά

Α.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε f(ξ)=0 δεν συνεπάγεται αναγκαία ότι η f είναι συνεχής ή ότι οι τιμές , είναι ετερόσημες δηλαδή $f(a)\cdot f(\beta)<0$
2. Αν δεν ισχύουν οι προυποθέσεις του Bolzano τότε δεν έχουμε σαν συμπέρασμα ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ρίζα.
3. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο[α,β] και επί πλέον ισχύει $f(a)\cdot f(\beta)<0$, τότε η ***έχει ακριβώς μία ρίζα στο (α,β).***
4. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει ***τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.***
5. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης f(x)=0 στο (α,β).Ωστόσο δεν αποκλείεται η ύπαρξη περισσότερων ριζών στο (α,β).Αυτό που κυρίως μας εξασφαλίζει είναι «το ΑΔΥΝΑΤΟΝ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΑΣ στο (α,β).»
6. Ενδέχεται μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα [α,β] να έχει ρίζα χωρίς να ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.
7. Δεδομένη ανισότητα μας οδηγεί στο Bolzano.
8. Έστω μια συνάρτηση f ,ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].Αν:

→ Η f είναι συνεχής στο [α,β] και , επιπλέον , ισχύει $f(a)\cdot f(\beta)\le 0$

Τότε υπάρχει ***ένα, τουλάχιστον ,*** $x_o \in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Α.3. ΣΧΟΛΙΑ

1. Αν μια συνάρτηση f $\begin{cases} \text{είναι συνεχής στο } \Delta \\ \quad \textit{και} \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \mu\varepsilon \ \mathrm{f}(\xi) > 0 \\ \quad \acute{\eta} \\ f(x) < 0, \mu\varepsilon \ \mathrm{f}(\xi) < 0 \end{cases}, \xi \in \Delta$

$\Rightarrow$ f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

💣Αν η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα Δ , τότε δεν διατηρεί υποχρεωτικά σταθερό πρόσημο στο Δ.
💣Αν η f δεν είναι συνεχής στο [α,β] και διατηρεί πρόσημο στο [α,β] τότε για κάθε $\mathrm{x_1, x_2} \in [\alpha, \beta]$ ισχύει : $\mathrm{f(x_1) \cdot f(x_2) > 0} \Leftrightarrow \mathrm{f(x_1), f(x_2)}$ ομόσημοι.

2. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f τις διάφορες τιμές του x.

Β . ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ (Θ.Ε.Τ.)
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ BOLZANO

Έστω μια συνάρτηση f ,ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].Αν:

→ Η f είναι συνεχής στο [α,β] και

→ $f(a) \neq f(\beta)$

Τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ***ένας, τουλάχιστον ,*** $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \eta$.

Β.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

1. Η παράλληλη ευθεία y=κ προς τον xx΄ θα τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.
2. Κάθε σημείο του άξονα yy΄ που βρίσκεται ανάμεσα στα $f(\alpha), f(\beta)$ και θα είναι τιμή της συνάρτησης .

Β.2. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το αντίστροφο του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών δεν ισχύει κατ'ανάγκη, δηλαδή αν μία συνάρτηση f ορισμένη στο [α,β] , παίρνει κάθε τιμή μεταξύ του $f(\alpha)$ και του $f(\beta)$, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι συνεχής στο [α,β].
2. Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα Δ είναι μία συνεχής γραμμή.
3. Αν η f ΔΕΝ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

4. Η συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα [α,β] παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των f(α) και f(β) στην περίπτωση που είναι $f(\alpha)\neq f(\beta)$.Επίσης ενδέχεται να έχει και τιμές εκτός του διαστήματος $\left[f(\alpha),f(\beta)\right]$ ή $\left[f(\beta),f(\alpha)\right]$.
5. Αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφη της , δηλαδή η $f^{-1}:f(\Delta)\to\Delta$ είναι συνεχής στο $f(\Delta)$ και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
6. Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης περιέχει το μηδέν τότε η εξίσωση f(x)=0 ***έχει τουλάχιστον μία ρίζα.***
7. Αν η f είναι σταθερή συνάρτηση τότε το $f(\Delta)$ είναι ένα σημείο (μονοσύνολο) f (εκφυλισμένο διάστημα της μορφής). [λ,λ]
8. Αν η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα Δ , τότε η εικόνα του Δ μέσω της f(δηλαδή η f(Δ)) θα είναι διάστημα, δηλαδή δεν είναι ένωση διαστημάτων, με την προϋπόθεση ότι η f δεν είναι σταθερή.
9. Δεν υπάρχει συνεχής, μη σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$,διότι το $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να περιέχει την εικόνα $f(\mathbb{R})$, η οποία είναι διάστημα.Το ίδιο ισχύει αν αντί του $\mathbb{R}$ έχουμε τυχαίο διάστημα Δ και η f είναι συνεχής στο Δ.

Β.3. ΣΧΟΛΙΑ

1. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] , τότε , δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές .

2. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.Αν Δ κλειστό διάστημα τότε ισχύει το παρακάτω:

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ (Θ.Μ.Ε.Τ.)

Αν η f είναι **συνεχής συνάρτηση στο [α,β],** τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.
Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ να ισχύει $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Γ.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα Δ=[α,β] και m=minf και M=maxf.

- Αν m=M τότε η f σταθερή στο διάστημα Δ.
- Αν $m\leq\eta\leq M$ τότε $\eta\in f(\Delta)$, οπότε υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο , ώστε $f(x_o)=\eta$.
- Αν $m\leq\eta\leq M$ και η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε η εξίσωση $f(x)=\eta$ έχει ***μία ακριβώς ρίζα στο Δ.***

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση , η οποία είναι συνεχής.Αν τα σημεία x_1, x_2 με $\left(x_1 < x_2\right)$ είναι θέσεις :

• ελαχίστων της f και υπάρχει $x_3 \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε, $f\left(x_3\right) > f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ τότε υπάρχει ***ένα, τουλάχιστον***, $x_o \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε το x_o να είναι θέση μεγίστου της f.

• μεγίστων της f και υπάρχει $x_3 \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε, $f\left(x_3\right) < f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ τότε υπάρχει ***ένα, τουλάχιστον***, $x_o \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε το x_o να είναι θέση ελαχίστου της f.

3. Πάντοτε για μια συνεχή στο [α,β] συνάρτηση ο μέσος όρος ν πλήθους τιμών της είναι τιμή της συνάρτησης , δηλαδή αν οι αριθμοί $x_1, x_2, ..., x_\nu \in [\alpha, \beta]$ τότε ο αριθμός $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_\nu\right)}{\nu}$ είναι τιμή της συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.

Γ.2.ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και της μέγιστης και ελάχιστης τιμής προκύπτει ότι **το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α,β] είναι το κλειστό διάστημα [m.M]** , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Γ.3. . ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ Θ.ΕΤ. ΜΕΤΑ ΤΟ Θ.Μ.Ε.Τ

Αν η f συνεχής στο [α,β] για κάθε κ μεταξύ της m και M και όχι μεταξύ f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o : f\left(x_o\right) = \kappa$

Δ . ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα και συνεχής** σε ένα **ανοιχτό διάστημα (α,β)** , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα και συνεχής** σε ένα **ανοιχτό διάστημα (α,β)** , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β,Α) όπου $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$.

Ακολουθεί ο παρακάτω πίνακας για όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

[α,β]	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	[f(α) ,f(β)]
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	[f(β), f(α)]
(α,β)	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
[α,β)	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$
(α,β]	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \mathrm{f}(\beta)\right]$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$

Πρέπει να προσέξουμε ότι στις περιπτώσεις που έχουμε ανοιχτά διαστήματα αντί για άκρο πραγματικό αριθμό μπορούμε να έχουμε το $\pm\infty$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα με τα όρια να τείνουν στο $\pm\infty$.

[α, $+\infty$)	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	[f(α) , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$)
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,f(α)]
(α, $+\infty$)	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
($-\infty$,α]	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(\alpha)\right]$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$
($-\infty$,α)	ΓΝ.ΑΥΞΟΥΣΑ	$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \mathrm{f}(\alpha)\right)$
	ΓΝ.ΦΘΙΝΟΥΣΑ	$\left(f(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$

ΣΧΟΛΙΑ

- Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ ισχύει:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to\beta} f(x)=+\infty \\ \text{ή} \\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty \text{ και } \lim\limits_{x\to\beta} f(x)=-\infty\end{cases} \quad \text{τότε } f\big((\alpha,\beta)\big)=\mathbb{R}$$

- Αν $f:(a,\beta)\to f(A)=(\gamma,\delta)$ και $f\uparrow$ άρα 1-1 ορίζεται η $f^{-1}:(\gamma,\delta)\to(\alpha,\beta)$ και $f^{-1}\uparrow$.

- ΓΙΑ ΤΑ ΟΡΙΑ ΙΣΧΥΕΙ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\gamma,\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=\delta \\ \textit{και} \\ \lim\limits_{x\to\gamma^+} f^{-1}(x)=\alpha,\ \lim\limits_{x\to\delta^-} f^{-1}(x)=\beta\end{cases}$