ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad (1)$$

$$|w - 5\,\overline{w}| = 12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z - w| \le 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ell n x-1,\ x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle \ell n x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell n t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell n x - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \dfrac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ell n x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,\ x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει πάντα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

ε) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-3|^2+|z+3|^2=36$$

$$|2w-1|=|w-2|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=3

Μονάδες 8

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1+z_2|$

Μονάδες 9

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta,\ x>0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Γ1. Αν είναι $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

Μονάδες 4

Γ2. Αν είναι $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f :

i) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη για κάθε α,β, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)

ii) έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο για $\alpha=0$ και $\beta\in\mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο, το $f(x_0)=7$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου αυτού.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)>-2$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{x^2-x}=2$
- $f(1)=f'(0)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(1)=-3$

Μονάδες 8

Δ2. Αν η $g(x)=f(x)+\alpha(x+1)^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$, να βρείτε τον αριθμό α

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-2(\xi+1)$

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζομένους*)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z| = 1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \dfrac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1 & , \ x=0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ell n x)\,\ell n\left(f(x)\right)\right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A)=\left(-\infty, 0\right]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma\left(x_0, F(x_0)\right)$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_0, \beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M\left(\xi, F(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon:\ F(\beta)\,x-(\beta-1)y+2012\,(\beta-1)=0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\left[F(\beta)+(1-\beta)\,f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x t\,f(t)\,dt,\quad \text{για κάθε}\quad x>0$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για την πολυωνυμική συνάρτηση
$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$
ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\alpha_0$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z|=1$

Μονάδες 9

Β2. $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ και ότι ο αριθμός $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha & , \quad x < 1 \\ (x-\beta)^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq -1$

Μονάδες 6

Γ2. Αν είναι $-1 \leq \alpha \leq 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$

Μονάδες 8

Γ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα a και β

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha = \dfrac{5}{4}$ και $\beta = -\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2} f(x)$, $x \in (-1, 1)$ με $g(x) \leq \beta x - 3$, $x \in (-1, 1)$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$

Δ1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $g'(0) = \beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι η $y = \beta x - 3$

Μονάδες 8

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \beta$, $x \in (-1,1)$, έχει μοναδική ρίζα το 0

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1,1)$

Μονάδες 7

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f\colon A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z\in\mathbb{C}$, τότε $z-\bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$

β. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

γ. Ισχύει $(\varepsilon\varphi x)'=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$

δ. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|iz-1|=1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (0, –1) και ακτίνα ρ=1

Μονάδες 9

Β2. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z|\leq 2$

Μονάδες 8

Β3. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου Κ(0, –1), είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}-2x$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-2}{x-2} = 2$
- $f(0)=2$ και
- η f' είναι γνησίως αύξουσα

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=f'(2)=2$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\ 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,\ f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ4. Αν επιπλέον δίνεται ότι $f(\xi)>0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ