ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2000-2018

ΟΡΙΣΜΟΙ-ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ; Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;	**Ο2001 Ο2006 Ε2009 Ο2010 Α2015**
Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] ;	**Ο2001 Α2008 Α2012 Ο2015 Α2017**
Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού του Α .Πότε η f λέγεται συνάρτηση 1-1 ; Πότε μια συνάρτηση f: $A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;	**Ο2003 Ε2005 Ο2012 Ε2015**
Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].	**Ε2004**
Έστω Α ένα υποσύνολο του R , f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και $x_o \in A$. Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_o (ολικό) μέγιστο, το $f(x_o)$;	**Ο2004**
Πότε δυο συναρτήσεις f.g λέγονται ίσες ;	**Α2007 Ο2008 Ε2012 Ο2014 Α2016**
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;	**Ο2007**
Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;	**Ε2010 Α2014**
Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α.Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο;	**Α2012**
Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.	**Ο2013 Ε2014**

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;	**Α2015**
Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.	**Ε2016**
Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;	**Ε2018**

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_o) = \eta$.	**Ο2001** **Α2005** **Α2015**

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$	**Α2000** **Ο2002**
Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f;	**Ε2000**
Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;	**Α2003** **Ε2008** **Α2016**
Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;	**Ε2003** **Ο2009** **Α2010** **Ε2015**
Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;	**Α2004** **Α2009**
Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;	**Α2005** **Α2011**

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;	**Α2006**
Πότε η ευθεία y=l λέγονται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.	**Α2007 Ε2016**
Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;	**Ε2007**
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;	**Α2010**
Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;	**Ε2010 Α2013**
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ;	**Ο2011**
Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.	**Ε2012**
Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)	**Α2013**
Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.	**Ε2013**
Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;	**Ε2013**
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;	**Α2014**

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = συνx$.	**Α2002 Ο2007 Ε2010**
Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.	**Α2000 Ο2002 Α2003 Ο2005 Ε2007 Ο2011 Ε2013 Α2018**
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(χ)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ.,τότε	**Ο2003 Ε2004**

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .	**Α2009 Α2014 Ο2015**
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$	**Α2004 Α2011 Ε2016 Ε2017 Ο2017**
Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.	**Ε2005 Ο2006 Ε2009 Ο2012**
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι: Αν $f'(\chi)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. Αν $f'(\chi)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .	**Α2006 Α2017**
Να αποδείξετε ότι : $(\sigma\upsilon\nu x)'= -\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	**Ε2006 Ε2011**
Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\lvert x\rvert$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{\lvert x\rvert}$	**Α2008**
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει: $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$	**Ο2009**
Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx, x∈A, όπου $A = \mathbb{R} - \{x /\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$ Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, x∈A	**Ο2010 Ο2016**
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.	**Ε2000 Α2012 Ο2014**
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.	**Ε2012 Α2016**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).	**E2014** **E2018** **O2018**

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.	**E2006** **E2011** **E2014** **O2016**
Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.	**A2018**

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\mathrm{G}(\mathrm{x})=\mathrm{F}(\mathrm{x})+\mathrm{c}, \mathrm{c}\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $\mathrm{G}(\mathrm{x})=\mathrm{F}(\mathrm{x})+\mathrm{c}, \mathrm{c}\in\mathbb{R}$	**E2001** **E2003** **O2004** **A2010** **E2015**
Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(a)$	**A2002** **E2008** **A2013**