

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα n_i , που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι:

i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

Μονάδες 4

B.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μονάδες 8

B.2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\emptyset)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

- β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

- γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

Μονάδες 13

- γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 9

- β) Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη, θεωρώντας ότι υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$.

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

2. $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$

3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$

6. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

7. $(\sigma \upsilon \nu x)' = \eta \mu x$

8. $(x^p)' = x^{p-1}, \quad p \text{ ρητός}, x > 0$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 12

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Κόμμα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
x_i	v_i	f_i
A		0,15
B	150	0,30
Γ		0,35
Δ		
Σύνολο		

α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

Μονάδες 10

γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα **A** και οι 10 στο τμήμα **B**.

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A** είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ.

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα **B** είναι :
950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

α) Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A**.

Μονάδες 6

β) Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος **B**.

Μονάδες 9

γ) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 10

B1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι x_1, x_2, \dots, x_k με συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k αντίστοιχα και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η μέση τιμή \bar{x} ;

Μονάδες 4

B2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

Εάν σε κάθε τιμή x_1, x_2, \dots, x_n ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2, \dots, w_n τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον μέσο ή μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x} = \dots\dots\dots$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x(2-x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

Μονάδες 10

B. Για $\alpha = 1/2$, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

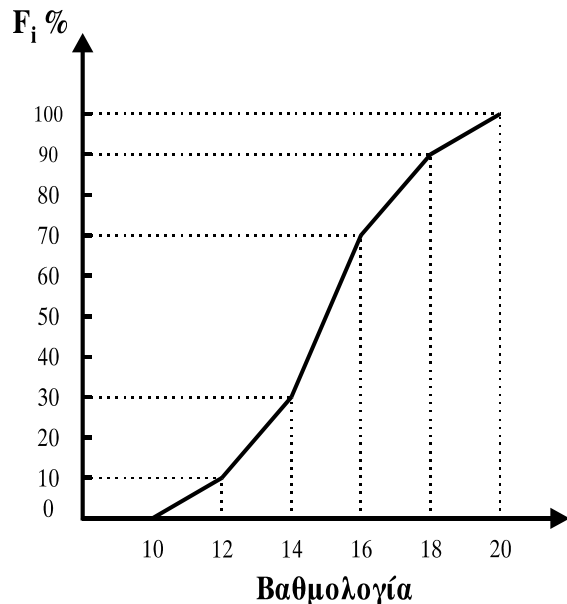
Μονάδες 5

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

- A.** Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω .

i) $P(k) = \frac{1}{k}$ ii) $P(k) = \frac{1}{2^k}$ iii) $P(k) = \frac{1}{2k}$

Μονάδες 8

- B.** Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες:

$$1, 1, 7, k, k, 3, 3, 3$$

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με πιθανότητα $P(k) = \frac{1}{2k}$.

Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω , όπου

$A = \{k \in \Omega : \text{η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X \text{ είναι } M_0 = 3\}$ και

$B = \{k \in \Omega : \text{η μέση τιμή } \bar{x} = 2,5\}$.

- α.** Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 8

- β.** Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Μονάδες 9

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Μονάδες 9

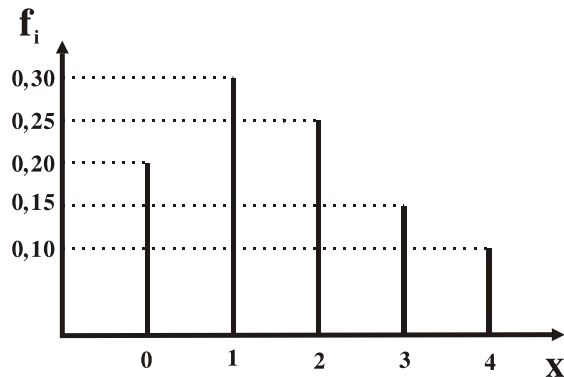
- B.** Ας υποθέσουμε ότι t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n . Τότε να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης A** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης B**, ώστε να προκύπτει ισότητα των μέτρων της **Στήλης A** με τις παραστάσεις της **Στήλης B**.

Στήλη A	Στήλη B
α. μέση τιμή \bar{x}	1. $\sqrt{s^2}$
β. διακύμανση s^2	2. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$
γ. τυπική απόκλιση s	3. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2$
δ. συντελεστής μεταβολής CV	4. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$
	5. $\frac{s}{\bar{x}}$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2ο

Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων ενός δείγματος 80 μαθητών μιας περιοχής στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων που ακολουθεί:



Για το ανωτέρω δείγμα βρείτε:

α. την επικρατούσα τιμή,

Μονάδες 5

β. πόσοι μαθητές κάνουν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως,

Μονάδες 6

γ. το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως,

Μονάδες 6

δ. το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6x^4 + 3x^2 + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α. το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$,

Μονάδες 5

β. την παράγωγο της συνάρτησης f και

Μονάδες 5

γ. τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων .

Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
1	8	
2		
3		
4		
5	2	0,1
Σύνολο		

Αν $\bar{x} = 2,5$ και $\delta = 2,5$

α. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος n του δείγματος είναι 20 .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα v_2 της τιμής $x_2 = 2$ ισούται με 2 .

Μονάδες 8

- γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πιο πάνω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν.

Μονάδες 12

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ