ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ
$f(x)=ax+\beta$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax^2$	$\mathbb{R}$	$[0,+\infty)$
$f(x)=ax^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$
$f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}$	$\mathbb{R}$	$[0,+\infty)$
$f(x)=\eta\mu x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$\mathbb{R}-\left\{x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2} / \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sigma\varphi x$	$\mathbb{R}-\{x=\kappa\pi+\pi / \kappa\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=a^x$	$\mathbb{R}$	$(0,+\infty)$
$f(x)=\log_a x$	$(0,+\infty)$	$\mathbb{R}$
$[\mathrm{f}(\mathrm{x})]^{\mathrm{g}(\mathrm{x})}$	$\mathrm{f(x)}>0$	

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ	ΑΚΡΟΤΑΤΑ
$f(x)=ax+\beta$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha, \alpha>0 \\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}, \alpha=0 \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha, \alpha<0 \end{cases}$	Δεν έχει
$f(x)=ax^2$	$A\nu$ α>0 $\begin{cases} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } (-\infty,0] \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } [0,+\infty) \end{cases}$ $A\nu$ α<0 $\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } (-\infty,0] \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } [0,+\infty) \end{cases}$	Αν α>0 *παρουσιάζει* ελάχιστο στο 0 Αν α<0 *παρουσιάζει* μέγιστο στο 0
$f(x)=ax^3$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha, \alpha>0 \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha, \alpha<0 \end{cases}$	Δεν έχει
$f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$	$\begin{cases} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha, \alpha>0 \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha, \alpha<0 \end{cases}$	Δεν έχει
$f(x)=\sqrt{x}$	Αύξουσα	ελάχιστο στο 0
$f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}$	$\begin{cases} \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } (-\infty,0] \\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } [0,+\infty) \end{cases}$	ελάχιστο στο 0
$f(x)=\eta\mu x$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \text{ και } \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$	μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$ ελάχιστο στο $\frac{3\pi}{2}$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha \text{ στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$	μέγιστο στο 0 και στο 2π ελάχιστο στο π
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	Αύξουσα	Δεν έχει
$f(x)=\sigma\varphi x$	Φθίνουσα	Δεν έχει
$f(x)=a^x$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha, a>1 \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha, 0<\alpha<1 \end{cases}$	Δεν έχει
$f(x)=\log_a x$	$\begin{cases} \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha, a>1 \\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha, 0<\alpha<1 \end{cases}$	Δεν έχει

ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ-1-1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ	ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ	'1-1'
$f(x)=ax+\beta$			$\times$
$f(x)=ax^2$	ΑΡΤΙΑ	y΄y	
$f(x)=ax^3$	ΠΕΡΙΤΤΗ	(0,0)	$\times$
$f(x)=\frac{\alpha}{x}$	ΠΕΡΙΤΤΗ	(0,0)	$\times$
$f(x)=\sqrt{x}$			$\times$
$f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}$	ΑΡΤΙΑ	y΄y	
$f(x)=\eta\mu x$	ΠΕΡΙΤΤΗ	(0,0)	
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	ΑΡΤΙΑ	y΄y	
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	ΠΕΡΙΤΤΗ	(0,0)	$\times$
$f(x)=\sigma\varphi x$	ΠΕΡΙΤΤΗ	(0,0)	$\times$
$f(x)=a^x$			$\times$
$f(x)=\log_a x$			$\times$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε f γνησίως αύξουσα .

- Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε f αύξουσα .

2. Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε f γνησίως φθίνουσα .

- Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε f φθίνουσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2$ ομόσημοι $\Leftrightarrow f \uparrow \Leftrightarrow \lambda > 0$

2. Αν $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2$ ετερόσημοι $\Leftrightarrow f \downarrow \Leftrightarrow \lambda < 0$

3. Αν $f \uparrow$ στο $(\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma)$ τότε διατηρεί τη μονοτονία της και στο (α,γ).

4. Αν f γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ -f γνησίως φθίνουσα στο Α. (Κ49)

5. Αν f γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$ -f γνησίως αύξουσα στο Α.

6. Αν $f \uparrow$ και f(x)>0, $x \in \Delta$ τότε $\dfrac{1}{f} \downarrow$ στο Δ.

7. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες $\Rightarrow$ f+g είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

8. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες $\Rightarrow$ f+g είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

9. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες και $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$

$\Rightarrow f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

10. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες και $f(x) \leq 0$ και $g(x) \leq 0$

$\Rightarrow f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

11. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες και $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$

$\Rightarrow f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

12. Ισχύει πάντα $x_1^2 \pm x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Αν $x_o \in \Delta$ και $f(x_o) \leq f(x)$ για κάθε $x_o \in \Delta$ τότε το $f(x_o)$ ονομάζεται ολικό μέγιστο στη θέση x_o .

2. Αν $x_o \in \Delta$ και $f(x_o) \geq f(x)$ για κάθε $x_o \in \Delta$ τότε το $f(x_o)$ ονομάζεται ολικό ελάχιστο στη θέση x_o .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν minf(x)=f(x_o) $\Rightarrow$ f(x)-f(x_o)$\geq$ 0 για κάθε $x \in A$.

2. Αν maxf(x)=f(x_o) $\Rightarrow$ f(x)-f(x_o)$\leq$ 0 για κάθε $x \in A$.

3. Αν maxf(x)<0 $\Rightarrow$ f(x)<0 για κάθε $x \in A$.

4. Αν minf(x)>0 $\Rightarrow$ f(x)>0 για κάθε $x \in A$.

5. Η ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου σημαίνει πρακτικά ότι ισχύει η σχέση

$$f_{min} \leq y \leq f_{max}$$

6. Αν $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $x \in A$ ***ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ*** minf(x)=α και maxf(x)=β.***Ισχύει αν οι εξισώσεις f(x)=α και f(x)=β είχαν τουλάχιστον μία λύση στο Α.***

7. Αν f$\uparrow$ [α,β] τότε minf(x)=f(α) και maxf(x)=f(β).

8. Αν f$\downarrow$ [α,β] τότε minf(x)=f(β) και maxf(x)=f(α).

9. Αν f$\uparrow$ ή $\downarrow$ στο (α,β) τότε δεν έχει ακρότατα.

10. Αν f$\uparrow$ στο (α,x_o] και f $\downarrow$ στο [x_o,β) τότε maxf(x)=f(x_o) στο (α,β).

11. Αν η f έχει σύνολο τιμών

[κ,λ]	(κ,λ]	[κ,λ)	(κ,λ)
maxf =λ και minf=κ	maxf =λ	minf=κ	Δεν έχει ακρότατα

12. Βασική ανισότητα : $(1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\cdot\alpha, \alpha \geq -1$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α,Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της gof ορίζεται από το σύνολο $A_1=\{x\in A / f(x)\in B\}$

- Η gof έχει νόημα μόνο όταν $f(A)\cap B\neq\varnothing$
- Αν Β=$\mathbb{R}$ τότε A_1=A
- Πρέπει να προσέξουμε ότι πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης και μετά τον τύπο. Είναι λάθος να βρούμε πρώτα τον τύπο της σύνθεσης και από τον τύπο να βρούμε το πεδίο ορισμού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Γενικά ισχύει $gof\neq fog$.

2. Για να ισχύει $gof=fog$ πρέπει : $\begin{cases} f(g(x))=g(f(x)) \\ \textit{και} \text{ επιπλέον} \\ A_{fog}=A_{gof} \end{cases}$

3. Ισχύει $ho(gof)=(hog)of$

4. Ισχύουν οι ισότητες (από δεξιά) : $\begin{cases} (f+g)oh=foh+goh \\ \textit{και} \\ (f\cdot g)oh=(foh)(goh) \end{cases}$

5. Η σύνθεση γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.
6. Ενδέχεται μια συνάρτηση να μην είναι συνθέσιμη με τον εαυτό της. Να μην υπάρχει η fof.
7. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις έχουν κλάδους πρέπει να συνθέσουμε τον κάθε κλάδο της μίας με κάθε κλάδο της άλλης.
8. Ενδέχεται η σύνθεση απλού τύπου να καταλήξει σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου και αντίστροφα.
9. Αν είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$ τότε ορίζονται πάντα οι συναρτήσεις fog, gof και μάλιστα είναι ίσες.
10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και g(x)=x .Τότε fog=gof διότι :

$$\begin{cases} fog, gof \text{ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού} \\ \textit{και} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \\ (fog)(x)=f(g(x))=f(x) \\ \textit{και} \\ (gof)(x)=g(f(x))=f(x) \end{cases}$$

Η g(x)=x ονομάζεται ταυτοτική.

ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ **λέγεται συνάρτηση "1-1"** ,όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1\neq x_2,\overset{\text{τότε}}{\Rightarrow}$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$ (1)

2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ **είναι συνάρτηση "1-1" ,αν και μόνο αν** για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $f(x_1)=f(x_2)\overset{\text{τότε}}{\Rightarrow}$ τότε $x_1=x_2$ (2)

❖ Άρα αν μια συνάρτηση είναι 1-1 ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2 \quad (3)$$
$$f(x_1)\neq f(x_2)\Leftrightarrow x_1\neq x_2 \quad (4)$$

Τη σχέση (1) τη χρησιμοποιούμε σε θεωρητικά προβλήματα
Τη σχέση (2) τη χρησιμοποιούμε όπου είναι γνωστός ο τύπος .
Τη σχέση (3) τη χρησιμοποιούμε για τη λύση των εξισώσεων και την απόδειξη ισοτήτων

▽ **ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 1**

Αν f 1-1 τότε $a=\beta\Leftrightarrow f(a)=f(\beta)$

Αν f όχι 1-1 τότε $a=\beta\Rightarrow f(a)=f(\beta)$

▽ **ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 2**

ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ ΤΟΤΕ ΠΡΟΦΑΝΩΣ, ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ"1-1"

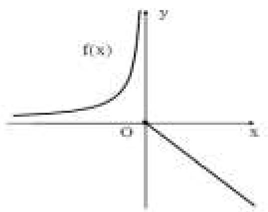
Έτσι, οι συναρτήσεις f,g,h με $f(x)=x^3$,$g(x)=e^x$,$h(x)=\ln x$, είναι συναρτήσεις "1-1".

▽ **ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ 2**

ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ"1-1"ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ

Προσοχή το αντίθετο δεν ισχύει.

Π.χ $f(x)=\begin{cases}-x, x\geq 0\\ -\dfrac{2}{x}, x<0\end{cases}$



▽ **ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 3**

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f ΕΙΝΑΙ "1}-\text{1"} \\ \qquad\qquad\text{ΚΑΙ} \\ \quad\text{ΣΥΝΕΧΗΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ } x \in A\end{array}\right. \Rightarrow f \text{ ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι: για να είναι μία συνάρτηση "1-1" θα πρέπει διαφορετικά στοιχεία από το πεδίο ορισμού να έχουν διαφορετικές εικόνες

ότι μια συνάρτηση f είναι "1-1" , αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών η εξίσωση y = f(x) έχει **ακριβώς μια λύση** ως προς x.

2. Αν $y \in f(A)$ και η f είναι 1-1 τότε η εξίσωση y=f(x) **έχει μοναδική λύση .**

3. Αν η εξίσωση y=f(x) έχει το πολύ μία λύση ως προς x στο A , τότε είναι "1-1".

Αν μια συνάρτηση είναι "1-1" τότε κάθε εξίσωση της μορφής f(x)=**α έχει το πολύ μία ρίζα.**

4. Δεν υπάρχουν σημεία στη C_f με την ίδια τεταγμένη. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη **το πολύ σε ένα σημείο.**

5. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 σε ένα διάστημα $E \subseteq A$ τότε ισχύουν όλα στο E και f(E).

6. Η f **ΔΕΝ** είναι 1-1 αν και μόνο αν για $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

7. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 στο A_1 και 1-1 στο A_2 αυτό **ΔΕΝ** σημαίνει ότι είναι 1-1 και στο $A_1 \cup A_2$.

8. Αν δύο συναρτήσεις είναι 1-1 τότε αυτό **ΔΕΝ** σημαίνει ότι το άθροισμα ή το γινόμενό τους είναι 1-1.

9. Η ισοδυναμία $f(g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ ισχύει **ΜΟΝΟ** όταν η f είναι 1-1.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ **"1-1"** με πεδίο ορισμού το Α και σύνολο τιμών το f(A).Ορίζεται συνάρτηση η οποία έχει πεδίο ορισμού το f(A) και σύνολο τιμών το Α .Ονομάζεται αντίστροφη ,συμβολίζεται με f^{-1} και ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

- f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το f(A)
- f^{-1} έχει σύνολο τιμών A_f
- $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f^{-1}(f(y)) = y, \mathrm{y} \in f(A)$

πχ $f(x) = a^x$ και $\mathrm{g}(x) = \log_a x$

∇ ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 1

ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ "1-1" ⇔ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ.

∇ ΑΝΤΙΘΕΤΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ 1

ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ "1-1". (πχ. τα πολυώνυμα 2ου βαθμού στο $\mathbb{R}$)

∇ ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ 2

ΟΙ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ C ΚΑΙ C$'$ ΤΩΝΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ f ΚΑΙ f^1 ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ y=x ΠΟΥ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ xOy ΚΑΙ x$'$Oy$'$.

1. Τα κοινά σημεία C_f , $\mathrm{C}_{f^{-1}}$ έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

2. Αν η f είναι ***γνησίως αύξουσα*** τότε τα κοινά σημεία C_f , $\mathrm{C}_{f^{-1}}$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης : $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$

3. Αν η f είναι ***δεν γνησίως αύξουσα*** τότε τα κοινά σημεία C_f , $\mathrm{C}_{f^{-1}}$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^1(\mathrm{y}) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$

4. Προφανώς όλα τα κοινά σημεία της C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x π.χ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

5. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο Μ(α,β) τότε η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο Ν(β,α).
6. Αν το σημείο Μ είναι κοινό των C_f και y=x τότε Μ$\in C_{f^{-1}}$
7. Αν η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο Μ(α,α) $\Leftrightarrow$ τότε η C_f διέρχεται από το σημείο Μ(α,α).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν η f είναι αντιστρέψιμη $\Rightarrow$ f^{-1} αντιστρέψιμη και μάλιστα $\left(f^{-1}(x)\right)^{-1}=f(x)$
2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη $\Rightarrow$ η f είναι αντιστρέψιμη
3. Αν η f ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμη $\Rightarrow$ ΔΕΝ είναι γνησίως μονότονη.
4. Αν η f ΔΕΝ είναι γνησίως μονότονη τότε μπορεί να αντιστρέφεται..πχ $f(x)=\begin{cases} x & ,-1\le x<0 \\ x+3, & -2<x<-1 \end{cases}$
5. ***Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο f(Δ) με το ίδιο είδος μονοτονίας .***
6. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχουν $a,\beta\in$ Α τέτοια ώστε : $\alpha\neq\beta$ και $f(\alpha)=f(\beta)$.
7. Μια σπαστή συνάρτηση αντιστρέφεται όταν $\begin{cases} \textit{κάθε} \text{ κλάδος είναι 1-1} \\ \textit{και} \\ \textit{τα} \text{ σύνολα τιμών είναι ξένα μεταξύ τους} \end{cases}$
8. Αν ένας από τους τύπους της συνάρτησης πολλαπλού τύπου εκφράζει σταθερή ή περιοδική ή άρτια συνάρτηση τότε δεν υπάρχει αντίστροφη .
9. $f=f^{-1}$ δεν σημαίνει μόνο ότι $f(x)=f^{-1}(x)$ αλλά έχουν ίσα και τα πεδία ορισμού τους και υπάρχει και η αντίστροφη.
10. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ τότε υπάρχει η αντίστροφη όταν αδ-βγ$\neq 0$ και $f=f^{-1}$ όταν α+δ=0.
11. Όταν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$ τότε ισχύουν: $\begin{cases} f^{-1}(f(x))=x \\ f(f^{-1}(x))=x \end{cases}$.Σε κάθε άλλη περίπτωση ***πρέπει*** να ελέγχεται αν οι συνθέσεις έχουν νόημα.
12. Γενικά θέτω σε μια σχέση όπου x το $f^{-1}(x)$για να προκύψει η $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$.
13. Στη λύση εξισώσεων/ανισώσεων με όρο της μορφής $f^{-1}(g(x))$ **πρέπει** $g(x)\in A_{f^{-1}}=f(A)$, όπου $f:A\to\mathbb{R}$
14. Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$, g : Β$\to\mathbb{R}$.

Αν $\begin{cases} g(f(x))=x \text{ , x} \in A \\ g:1-1 \\ g(B)=A \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(A)=B \\ f^{-1}(x)=g(x) \text{ ,x} \in B \end{cases}$

ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το Α ονομάζεται άρτια όταν για κάθε x∈Α ισχύει: -x∈A και $f(-x)=f(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έχει άξονα συμμετρίας τον y'y⇔ Αν σημείο Α=(α,β)∈C_f τότε (-α,β) ∈C_f
2. Μία άρτια συνάρτηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** γνησίως μονότονη.
3. Μια γνησιώς μονότονη **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** άρτια συνάρτηση.
4. Μία άρτια συνάρτηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** 1-1.
5. Μία άρτια συνάρτηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** αντιστρέψιμη.
6. Μία άρτια συνάρτηση διατηρεί τα ακρότατά της.
7. Σε συμμετρικά ως προς το Ο διαστήματα η f έχει αντίθετο είδος μονοτονίας .
8. Αν μια μη σταθερή συνάρτηση είναι άρτια τότε σε συμμετρικά διαστήματα ως προς το μηδέν, θα έχει αντίθετο είδος μονοτονίας, δηλαδή αν στο [α,β]είναι γνησίως φθίνουσα, στο [-β,-α]είναι γνησίως αύξουσα. Π.χ. f(x)=συνx

ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Β. ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το Α ονομάζεται περιττή όταν για κάθε x∈Α ισχύει: -x∈A και $f(-x)=-f(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)⇔ Αν σημείο Α=(α,β)∈C_f τότε (-α,-β) ∈C_f

2. Αν η f είναι περιττή και 0∈A_f τότε f(0)=0

3. Σε συμμετρικά ως προς το Ο διαστήματα έχει αντίθετου είδους ακροτάτου.

4. Σε συμμετρικά ως προς το Ο διαστήματα η f διατηρεί τη μονοτονία της . f(x)=εφx.

5. Αν δεν ισχύει f(0)=0 τότε η f δεν είναι περιττή στο[-α,α].

✓ Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το Ο τότε είναι ή άρτια ή περιττή.

✓ Αν μια συνάρτηση είναι περιττή και έχει ρίζα το x τότε θα έχει και το -x.

❖ Κάθε συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ είναι άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Γ. ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού το Α ονομάζεται περιόδικη όταν υπάρχει $T \neq 0$ με $f(x+T)=f(x)$ και $f(x-T)=f(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι βασικές περίοδοι των συναρτήσεων ημx,συνx,εφx,σφx είναι: 2π,2π,π,π.

2. Αν T_1,T_2 οι περίοδοι των f και g αντίστοιχα τότε το ΕΚΠ των T_1,T_2 είναι η περίοδος των $f \pm g, f \cdot g, f \div g$

3. Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις :

- $\eta\mu x=\eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\theta \\ x=2k\pi+(\pi-\theta) \end{cases} k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\theta \\ x=2k\pi-\theta \end{cases} k \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Rightarrow x=k\pi+\theta, k \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Rightarrow x=k\pi+\theta, k \in \mathbb{Z}$

Θ	**0**	**90**	**180**	**270**	**360**
Ημθ	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**
Συνθ	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**
Εφθ	**0**	**-**	**0**	**-**	**0**
Σφθ	**-**	**0**	**-**	**0**	**-**

Θ	**30**	**45**	**60**
Ημθ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Συνθ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Εφθ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$
Σφθ	$\sqrt{3}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

❖ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ & ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g ορισμένες στο Α και έστω ότι ορίζεται η $g∘f$.

Αν οι f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας ,τότε η $g∘f$ είναι γνησίως αύξουσα .

Αν οι f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας ,τότε η $g∘f$ είναι γνησίως φθίνουσα

2. Αν $g(x)>h(x)$ και f γν.αύξουσα τότε: $f(g(x))>f(h(x))$

3. Αν $g(x)>h(x)$ και f γν.φθίνουσα τότε: $f(g(x))<f(h(x))$

❖ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ & 1-1

1. Αν οι συναρτήσεις f και g και h είναι συνθέσιμες και επί πλέον ισχύει :

i.Αν f,g 1-1	τότε fog είναι 1-1
ii.Αν fog είναι 1-1	τότε g είναι 1-1
iii.Αν fog είναι 1-1	τότε f όχι υποχρεωτικά 1-1
iv.Αν fog=foh και f 1-1	τότε g=h.
v.Αν (fog)(x)=x	τότε g 1-1
vi.Αν (fof)(x)=xf(x) και $f(x)\neq 0$	τότε f 1-1

❖ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ & ΑΡΤΙΑ/ΠΕΡΙΤΤΗ

1. Έστω οι συναρτήσεις f: $A\to B$ και g: $B\to \Gamma$. Ισχύουν οι προτάσεις .

i.Αν η f είναι άρτια ,	τότε η $g∘f$ είναι άρτια .
ii.Αν η f είναι περιττή και η g άρτια ,	τότε η $g∘f$ είναι άρτια .
iii.Αν η f είναι περιττή και η g περιττή ,	τότε η $g∘f$ είναι περιττή .
iv.Αν η f είναι περιττή και $g∘f$ είναι περιττή ,	τότε η g είναι περιττή.

❖ 1-1 & ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1.
2. Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1 τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

❖ 1-1 & ΑΡΤΙΑ / ΠΕΡΙΤΤΗ

1. Αν η f είναι άρτια και η g περιττή , τότε η f δεν είναι 1-1, ενώ η g είναι 1-1 .
2. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια τότε δεν είναι 1-1 και αντιθετοαντίστροφα.

❖ ΑΡΤΙΑ / ΠΕΡΙΤΤΗ

1. Το γινόμενο/πηλίκο άρτιων/περιττών συναρτήσεων $\Rightarrow$ άρτια συνάρτηση.
2. Το γινόμενο/πηλίκο άρτιας και περιττής $\Rightarrow$ περιττή συνάρτηση.
3. Το άθροισμα άρτιων(περιττών) συναρτήσεων $\Rightarrow$ άρτια (περιττή) συνάρτηση.

❖ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ & ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο f(Δ) με το ίδιο είδος μονοτονίας.
2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και αντιστρέψιμη.
3. Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.
4. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε μπορεί να αντιστρέφεται.

❖ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ & ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ & 1-1

1. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και αντιστρέψιμη και αντίστροφα.
2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και αντιστρέψιμη.Τότε ισχύουν: $f^{-1}of=x$ και $fof^{-1}=x$

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f: A→ B και g: B→ Γ , οι οποίες είναι 1-1. Τότε και η συνάρτηση g∘f είναι 1-1 και επί πλέον ισχύει: $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$.
4. Αν f,g αντιστρέψιμες με $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ισχύει $(fog)(x)=(gof)(x),x\in\mathbb{R}$

τότε ισχύουν τα παρακάτω: $\begin{cases}(g^{-1}of)(x)=(f^{-1}og)(x)\\(gof^{-1})(x)=(f^{-1}og)(x)\\(g^{-1}of^{-1})(x)=(f^{-1}og^{-1})(x)\end{cases}$

5. Αν f , g αντιστρέψιμες τότε : fog αντιστρέψιμη και $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

5. Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$.

Αν $\begin{cases}g(f(x))=x\ ,\ x\in A\\g:1-1\\g(B)=A\end{cases}$, $\Rightarrow\begin{cases}f(A)=B\\f^{-1}(x)=g(x)\ ,x\in B\end{cases}$

❖ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ & ΑΡΤΙΑ / ΠΕΡΙΤΤΗ

1. Αν ένας από τους τύπους της συνάρτησης πολλαπλού τύπου εκφράζει σταθερή ή περιοδική ή άρτια συνάρτηση τότε δεν υπάρχει αντίστροφη

ΕΥΡΕΣΗ ΡΙΖΑΣ

Α. ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

1. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει **το πολύ μία ρίζα** στο Δ.⇔ τέμνει τον x'x το πού σε ένα σημείο.

2. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε η εξίσωση f(x)=η έχει **το πολύ μία ρίζα** στο Δ. $\Leftrightarrow$ τέμνει την ευθεία y=η το πολύ σε ένα σημείο.

3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=**0 έχει ακριβώς μία ρίζα** στο Δ $\Leftrightarrow$ f(x)=0 μία λύση στο Δ .

4. Αν f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας στο διάστημα Δ τότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει **έχει το πολύ μία ρίζα** στο Δ. $\Leftrightarrow$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

<u>Β. ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ 1-1</u>

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι: για να είναι μία συνάρτηση "1-1" θα πρέπει διαφορετικά στοιχεία από το πεδίο ορισμού να έχουν διαφορετικές εικόνες
   ότι μια συνάρτηση f είναι "1-1" , αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών η εξίσωση y = f(x) έχει **ακριβώς μια λύση** ως προς x.
2. Αν $y \in f(A)$ και η f είναι 1-1 τότε η εξίσωση y=f(x) **έχει μοναδική λύση .**
3. Αν η εξίσωση y=f(x) έχει το πολύ μία λύση ως προς x στο Α , τότε είναι "1-1".
   Αν μια συνάρτηση είναι "1-1" τότε κάθε εξίσωση της μορφής f(x)=**α έχει το πολύ μία ρίζα.**

<u>Γ. ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ</u>

1. Αν $f^{-1}(0)=a \Leftrightarrow f(a)=0$

<u>Δ. ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΤΙΑΣ / ΠΕΡΙΤΤΗΣ</u>

1. Αν η f είναι περιττή και $0 \in A_f$ τότε f(0)=0.
2. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια/περιττή και έχει ρίζα το x τότε θα έχει και το -x.

Ε. ΜΕ ΟΠΛΟ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

- Λύνουμε περίπλοκες εξισώσεις.
- Λύνουμε ανισώσεις.
- Βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνάρτησης.
- Εξασφαλίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι ένα προς ένα και αντιστρέψιμη.
- Βρίσκουμε πλήθος ριζών.
- Βρίσκουμε πιο εύκολα τα κοινά σημεία μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της.
  Και είμαστε ακόμα στην αρχή...............

Όταν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε όλα είναι πιο εύκολα για μας.............