Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x\,.$$

Μονάδες 8

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $Arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g\left(f(x) + 2x - 1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

ι) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) \quad .$$

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$$

Μονάδες 9

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)+\lim_{x\to x_o} g(x)$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)-\lim_{x\to x_o} g(x)$$

Μονάδες 2

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ ισχύει :

$$|z|=\alpha^2+\beta^2$$

Μονάδες 2

8. Για το μιγαδικό αριθμό i ισχύει : $i^4 = 1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1+i$, $z_2 = 3-4i$

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1+5z_2

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_2}{\bar{z}_1}$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι: $Arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x}{x-2} & , \text{αν } x<2 \\ \\ -x^2+k & , \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$

όπου $k\in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

α. το k, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$,

Μονάδες 7

β. το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$,

Μονάδες 5

γ. το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ και

Μονάδες 5

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{x+3}$ στο $-\infty$.

Μονάδες 8

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\ [\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)].$$

Μονάδες 15

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

β. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 2

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{x^2+|z|^2}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
με $\alpha\neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1| > |z-1|$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \;,\; x\in\mathbb{R}$$

και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}\,dt=1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1].

Μονάδες 13

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$.

Μονάδες 4

Β. **α)** Αν $z=x+yi \neq 0$, $|z| = \rho$ και θ ένα όρισμα του z, να αποδείξετε ότι ο z παίρνει τη μορφή

$$z=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$$

Μονάδες 8,5

β) Αν $z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$, $z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_1=z_2$, τότε

1) $\rho_1=\rho_2$ και $\theta_1+\theta_2=0$.
2) $\rho_1+\rho_2=0$ και $\theta_1=\theta_2+2k\pi$, $k \in Z$.
3) $\rho_1=\rho_2$ και $\theta_1 - \theta_2=2k\pi$, $k \in Z$.
4) $\rho_1 - \rho_2=0$ και $\theta_1+\theta_2=2k\pi$, $k \in Z$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$

α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

Μονάδες 8

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα y΄y .

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες x=0, x=1.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν f(1) = 0 και

$$x f'(x) - 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt}{(\ln x)^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ