ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΑΠ2000ΤΕΧΝ ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & ,0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x} & ,x\geq 5 \end{cases}$

α. Να βρεθούν τα $\lim_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ **Μονάδες 6**

β. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=5$. **Μονάδες 10**

γ. Για τις τιμες των α,β του ερωτήματος Β να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. **Μονάδες 9**

ΕΠ2000 ΘΕΤ ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f ,συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: με $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$ **α.** Να βρείτε το f(0) **Μονάδες 7**

ΑΠ 2001 ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x\leq 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9. **Μονάδες 9**

ΕΠ2001 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\alpha, x\leq 1 \\ (1-e^{-x+1})\ln(x-1), x\in(1,2] \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$

β. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ **Μονάδες 11**

γ. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x. **Μονάδες 7**

ΟΜ 2003ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x-3, x\le -4/3\\ 2x+1, x>-4/3\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=-\dfrac{4}{3}$ **Μονάδες 5**

ΟΜ 2004ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ ax+\beta & 0<x<1\\ 1+x\ln x & x\ge 1\end{cases}$, όπου α, $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
Μονάδες 8

ΕΠ2005 ΘΕΜΑ 4º

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR → IR , για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

.α. Να δείξετε ότι: **i.** f(0)=0 **Μονάδες 4**

ΟΜ2005 ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}a+e^x, x\le 0\\ x\ln x, x>0\end{cases}$ όπου $a\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=0$ **Μονάδες 10**

ΕΠ2007 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, x<0\\ x^2+3x+3\sigma\upsilon\nu x, x\ge 0\end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$. **Μονάδες 8**

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0=0, να αποδειχθεί ότι $\alpha=\beta=3$. **Μονάδες 9**

ΑΠ2008ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**

ΕΠ2008ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^2 – 2lnx, x > 0.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x>0 \\ k & , \quad x=0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. **Μονάδες 6**

ii. Αν k=1/2 , τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e). **Μονάδες 7**

ΑΠ2009 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0$ Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt, x\in(0,2]$ και

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{H(x)}{x}-\int\limits_0^x f(t)dt+3, x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]. **Μονάδες 5**

ΑΠ2014 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$ **Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 7**

ΕΠ2014 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & \text{αν } x>0 \\ 0 \quad , & \text{αν } x=0 \end{cases}$

Γ1. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. **Μονάδες 4**

ΕΠ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}+1 & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & x>1 \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ **Μονάδες 3**

ΟΜ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1} & 0<x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$ **Μονάδες 8**

ΑΠ2017 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4} & x\in[-1,0) \\ e^x ημx & x\in[0,\pi] \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ **Μονάδες5**

ΕΠ2017 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{ημx}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\leq x<0 \\ 2 & ,x=0 \\ x^3-3x^2+2 & ,x>0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής . **Μονάδες2**

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , τότε :

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \Re$ **Μονάδες2**

ΕΠ2018 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & x>1 \\ x^2+\alpha & x\le 1 \end{cases}$

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \Re$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής . **Μονάδες3**

Για α=1

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [1/2,4] .

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΕΠ2000 ΘΕΤ ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f ,συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$

α. Να βρείτε το f(0)

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=0$ **Μονάδες 9**

γ. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΕΠ2001 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει :

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\int_1^x \dfrac{tf(t)}{x^2}dt,\ x>0$ **α.** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Μονάδες 3

ΟΜ2003 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x-3, x\le -4/3 \\ 2x+1, x>-4/3 \end{cases}$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=-\dfrac{4}{3}$. **Μονάδες 10**

γ) Για $x \neq -\frac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$. **Μονάδες 10**

ΕΠ2005 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: IR \to IR$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 2005$. α. Να δείξετε ότι: **i.** $f(0)=0$ **ii.** $f'(0)=1$. **Μονάδες 4**

ΟΜ2005 ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a+e^x, x \leq 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$ όπου $a \in \mathbb{R}$

β)Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει α= -1 :

1. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ **Μονάδες 5**

ΑΠ2009 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$ Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt, x \in (0,2]$ και

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int\limits_0^x f(t)dt + 3, x \in (0,2] \\ 6\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, x=0 \end{cases}$$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, 0<x<2$ **Μονάδες 6**

ΑΠ2010 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε x∈ $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις: f(x)≠x και $f(x) - x = 3 + \int\limits_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 5**

ΑΠ2011 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε x∈ $\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις: i) f(x)>0 και g(x)>0 ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι f(x) = g(x) για κάθε x∈ $\mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

ΟΜ2011 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (-1,+∞) →ℝ για την οποία ισχύει: $2\int_0^x f(t)dt = (\ln(x+1))^2$

Δ.1.Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, x>-1

ΑΠ2013 ΘΕΜΑ Δ

Έστω f : (0, + ∞) →IR μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

Η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞) και f (1) = 1 και $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g (x) = $\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt$, x ∈ (1, + ∞) και α > 1

Να αποδείξετε ότι:**Δ1.** f′ (1) = 0 (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = 1 (μονάδες 2). **Μονάδες 6**

ΟΜ2013 ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞) → ℝ για την οποία ισχύει:

$3\int_1^x 2tf(t)dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8$, x>0 **Δ.1.**Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ **Μονάδες 6**

ΕΠ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & x > 1 \end{cases}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι το χ=1 είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο **Μονάδες 8**

ΑΠ2017 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4} & x\in[-1,0) \\ e^x ημx & x\in[0,\pi] \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$, και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. **Μονάδες5**

ΕΠ2017 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2 & ,x=0 \\ x^3-3x^2+2 & ,x>0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής . **Μονάδες2**

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , τότε :

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $α\in\Re$ **Μονάδες2**

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

ΕΠ2001 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+α, x\le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), x\in(1,2] \end{cases}, α\in\mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$ **Μονάδες 7**

ΑΠ 2001ΘΕΜΑ 4ο

δ.Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}(x\, f(x)\, ημ2x)$. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ **Μονάδες 7**

ΕΠ2003 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$. α.Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Μονάδες 5

ΑΠ2003 ΘΕΜΑ 3ο

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{a\to-\infty} I(\alpha)$ $\left(e^{\alpha}\left(-2\alpha^2+7\alpha-7\right)+7\right)$ **Μονάδες 9**

ΕΠ2004 ΘΕΜΑ 4ο

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. f(x)=e^{x} –(x + 1). **Μονάδες 6**

ΟΜ2004 ΘΕΜΑ 4ο

β) Αν $f(x)=\begin{cases} -x^2 & x\le 0 \\ ax+\beta & 0<x<1 \\ 1+x\ln x & x\ge 1 \end{cases}$, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ισχύει: α=1 και β=0, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$ **Μονάδες 9**

ii) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ **Μονάδες 8**

ΑΠ2005 ΘΕΜΑ 3ο

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. E(λ) = $\dfrac{e-2}{2\lambda}$. **Μονάδες 7**

ΑΠ2005 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση 2 f΄(x) = e$^{x\,-\,f(x)}$ για κάθε x $\in$ IR και f(0) = 0. **α.** Να δειχθεί ότι: $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$ **Μονάδες 6**

ΕΠ2005 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR → IR , για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

. **i.** f(0)=0 **ii.** f΄(0)=1. β. Να βρείτε το λ∈ IR έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$

Μονάδες 7

ΟΜ2005 ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^x, x\in(1,+\infty)$

β) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **Μονάδες 6**

ΕΠ2006 ΘΕΜΑ 4ο

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$. **Μονάδες 5**

ΟΜ2006 ΘΕΜΑ 4ο

δ)Να βρεθεί το $\lim\dfrac{E(\lambda)}{\lambda}$ $\quad E(\lambda)=3/2\left(e^{2\lambda}-1\right)$ **Μονάδες 10**

ΑΠ2007 ΘΕΜΑ 4ο

δ. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$ **Μονάδες 7**

ΟΜ2007 ΘΕΜΑ 4ο

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}$ $\quad I(x)=e^x-\dfrac{1}{3e^{3x}}-\dfrac{2}{3}$ **Μονάδες 10**

ΟΜ2008 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}, x>0$

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **Μονάδες 8**

ΕΠ2009 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2)$, x > -1 όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\geq -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. **Μονάδες 5**

ΕΠ2010 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f: IR → IR η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο IR με f(0)=1 και f΄(0)=0 **Δ2.** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{ημ^3x}=+\infty$ **Μονάδες 6**

ΑΠ2011 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις: i) f(x)>0 και g(x)>0 ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι f(x) = g(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Δ2.** Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ **Μονάδες 5**

ΑΠ2012 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:(0,+∞)⟶ℝ, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x)\neq 0$, $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\geq\dfrac{x-x^2}{e}$ και $\ell nx-x=-\left(\displaystyle\int_1^x\dfrac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(t)|$

Αν είναι f(x) = e^{-x}(ℓnx - x), x>0, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 ημ\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$

ΕΠ2012 ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:ℝ→ℝ, για την οποία ισχύει xf(x)+1= e^x, για κάθε x∈ℝ.

Γ.1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ **Μονάδες 6**

Γ.4.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln x\ln(f(x))]$ **Μονάδες 5**

ΟΜ2012 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=2$ και f(0)=2 και και η f' είναι γνησίως αύξουσα

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=f'(2)=2$. **Μονάδες 8**

ΑΠ2015 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbb{R}$.

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right)\ln|f(x)|\right]$. **Μονάδες 6**

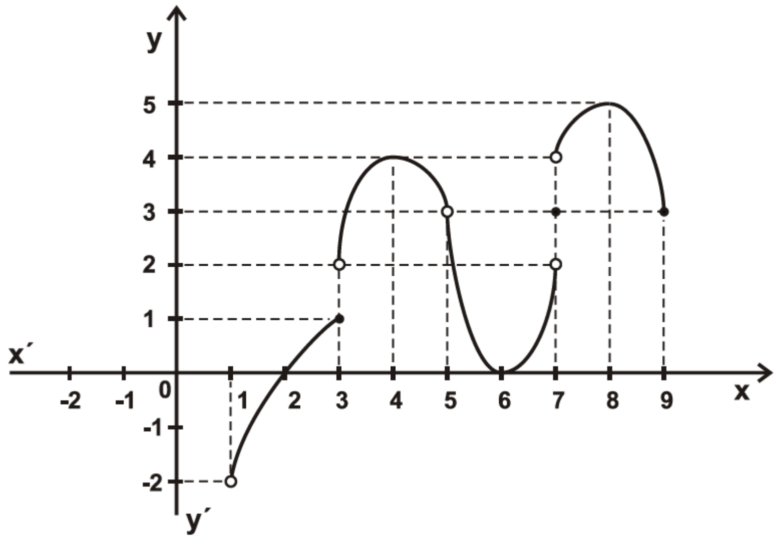
ΑΠ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:ℝ→ℝ, για την οποία ισχύει $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x, x\in\mathbb{R}$,

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$, Δίνονται $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$ **Μονάδες 5**

ΕΠ2016

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o)=0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΟΜ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1} & 0<x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ **Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(e^x\right)}{e^{f(x)}}$ **Μονάδες5**

ΑΠ2017 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x, x\in[0,\pi]$ **Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο

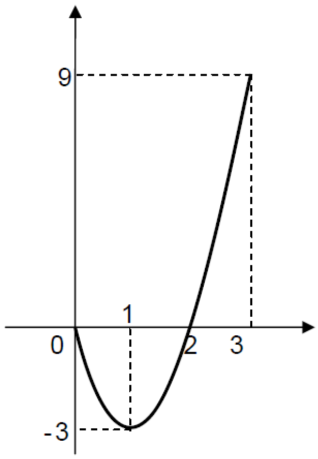
$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$ **Μονάδες5**

ΕΠ2017 ΘΕΜΑ 3ο

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΕΠ2018 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\eta\mu x - x$

Γ4. Να αποδείξετε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ ότι και να υπολογίσετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-2f(x)\right)\ln x\right]$

Μονάδες7

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΕΠ2000 ΤΕΧΝ ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=4 **Μονάδες 5**

ΕΠ2001 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει :

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\int_1^x \dfrac{tf(t)}{x^2}dt, x>0$ **α.** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}, x>0$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 4**

ΟΜ 2002 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+4+\dfrac{1}{2x+4}$.**β)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 9**

ΕΠ2003 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.
β.Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο- ∞. **Μονάδες 6**

ΕΠ2008 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$, $x>0$.β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

ΕΠ2009 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2)$, $x>-1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\geq-1$**Β.** Έστω ότι $\lambda=-1$
β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μονάδες 6**

ΟΜ2009 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{x-\alpha}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. **β.** Για α=-1, **ii.** να αποδείξετε ότι ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΕΠ2010 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$ **Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 5**

ΟΜ2010 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3\ln x$, $x>0$ **Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f **Μονάδες 7**

ΕΠ2013 ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$2xf(x)+x^2(f'(x)-3)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=\frac{1}{2}$ **Γ.1.** Να αποδείξετε ότι

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Γ.2.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος **Μονάδες 4**

ΑΠ2014 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in R$

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$

καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$. **Μονάδες 6**

ΟΜ2014 ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>0$ **Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μονάδες 8**

ΟΜ2015 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}, x>0$

Γ1. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, εάν υπάρχουν **Μονάδες 6**

ΑΠ2016 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

Β3. Να βρείτε ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f **Μονάδες 7**

ΕΠ2016 ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}+1 & 0<x<1\\ 1 & x=1\\ \frac{\ln x}{x-1} & x>1\end{cases}$

Δ1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, εάν υπάρχουν **Μονάδες 2**

ΟΜ2016 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1-\frac{1}{x-2}, x>2$

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 6**

ΑΠ2017 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$

Β3. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 4**

ΟΜ2017 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\frac{e^x}{e^{2x}+1}, x\in\mathbb{R}$

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h. **Μονάδες 5**

ΑΠ2018 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 6**

ΕΠ2018 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x} & x>1\\ x^2+\alpha & x\le 1\end{cases}$

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση. **Μονάδες9**