ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β),

όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$

δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in C$ με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_{0}^{x}\frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Για καθεμιά από τις επόμενες πέντε (5) προτάσεις,* ***α.*** *έως* ***ε.****, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***Σ****, αν η πρόταση είναι* ***Σωστή****, ή* ***Λ****, αν αυτή είναι* ***Λανθασμένη****.*

α. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

β. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι:

$$\left(cf(x)\right)' = f'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

γ. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$, τότε ισχύει ότι:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

δ. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Μονάδες 8

Β2. Αν $z=2+i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w+z|=|z^2|$.

Μονάδες 7

Β3. Αν $z=2+i$ και $u=\dfrac{\bar{z}+iz}{\bar{z}-1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010}=-1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+3x+\text{συν}x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+8) = f(6x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x} + 2x, \ \ x \neq 0$. Να βρείτε:

Δ1. Τα τοπικά ακρότατα της f.

Μονάδες 8

Δ2. Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

Δ3. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, f(1)).

Μονάδες 4

Δ4. Το σημείο Μ(ξ, f(ξ)), ξ>0, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1, f(1)), Β(3, f(3)).

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(ημx)' = συνx$

Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $\left(α^x\right)' = xα^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z\in C$ ισχύει $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w-z_1|^2 + |w-z_2|^2 = |z_1-z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2\cdot \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 0$$

Μονάδες 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \int_0^1 f(xt)dt + x^3}{ημ^3 x} = +\infty$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot \left(f(x) + x^2\right), \ x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt \ , \ x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta$$

β) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ε) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<0<\beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Αν ισχύει $f(\alpha)=5\beta$ και $f(\beta)=5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

Β1. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Μονάδες 10

Β2. Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία ε: $x-5y+2010=0$

Μονάδες 10

Β3. Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2-6z+\gamma=0$ με $\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 με $\text{Im}(z_1)>0$ και $|z_1|=5$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma=25$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma=25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w-z_1|=|w-z_2|$, να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1-2-3i)^8+(z_2-4+5i)^8$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+3)\sqrt{9-x^2}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της f:

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3,\ 3)$ (Μονάδες 3)

β. στο σημείο $x_0=-3$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Μονάδες 9

Δ4. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx,\ x \in A$, όπου $A = \mathbb{R} - \{x / συνx = 0\}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(εφx)' = \frac{1}{συν^2 x},\ x \in A$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Αν $α > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} α^x = +\infty$

γ) Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \ x \in A$$

δ) $\int ημx\,dx = συνx + c,\ c \in \mathbb{R}$

ε) Αν οι συναρτήσεις f΄, g΄ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx,\quad x \in Δ$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $ψ = 1$

Μονάδες 7

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$

Μονάδες 10

Β3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\ln x,\quad x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) = -f(x) + x,\ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ f(0) = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^x\big(f(x) - x + 1\big),\ x \in \mathbb{R},\ \text{είναι σταθερή.}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x} + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ