

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

- A3.** Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

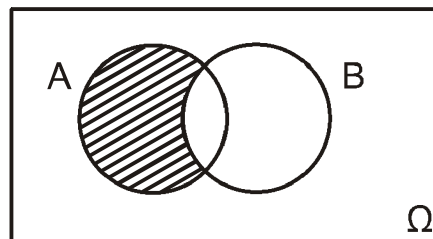
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- β)** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

- γ)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

- δ)** Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- ε)** Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $B - A$.



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

B1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν:

- α.** η μέση τιμή \bar{x} (μονάδες 6)
- β.** η διάμεσος δ (μονάδες 5)
- γ.** η διακύμανση s^2 . (μονάδες 7)

Μονάδες 18

B2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

- Δ1.** Να κατασκευάσετε το δένδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

- Δ2.** Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

B: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

- Δ3.** Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος Δ2.

- α.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$A', A \cap B, A - B, B - A$. (μονάδες 8)

- β.** Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω , το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο A όσο και με το ενδεχόμενο B, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$. (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 31.

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.

A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 72:

Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

A4. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για τη μέση τιμή \bar{x} είναι:

$$\alpha. \bar{x} = \frac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + v_4 \cdot x_4}{10} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 9}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

β. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 10$ που είναι άρτιος αριθμός. Έτσι

$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4.$$

γ.

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{v_1(x_1 - \bar{x})^2 + v_2(x_2 - \bar{x})^2 + v_3(x_3 - \bar{x})^2 + v_4(x_4 - \bar{x})^2}{10} = \\ &= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} = \\ &= \frac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 25}{10} = \frac{50}{10} = 5. \end{aligned}$$

B2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε το συντελεστή

$$\text{μεταβολής } cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

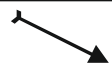

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x - 1$.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f .

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f'	-		+
f			

$$\text{Είναι } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1/2$, ελάχιστο $f(1/2) = 3/4$.

Γ2. Είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, οπότε $A(2, 3)$.

Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2, 3)$. Τότε θα έχουμε:

$$3 = 2a + \beta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\beta = -3$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ϵ) στο σημείο $A(2, 3)$ είναι

$$y = 3x - 3 \quad (\epsilon).$$

Γ3.

- Για $y = 0$ η (ϵ) γράφεται $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Επομένως η (ϵ) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(1, 0)$.
- Για $x = 0$ η (ϵ) γράφεται $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$
Επομένως η (ϵ) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -3)$.

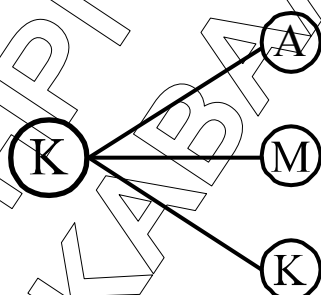
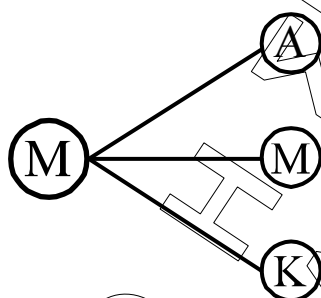
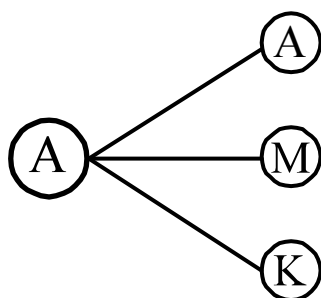
Γ4. Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} &= \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 1 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - x}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πείραμα προκύπτει το εξής δενδροδιάγραμμα:



Έτσι ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK \}$$

Δ2. $A = \{AM, MM, KM\}$

$$B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$$

Δ3. α. Από το Δ2 προκύπτει ότι:

$$N(A) = 3, N(B) = 6, \text{ ενώ } N(\Omega) = 9.$$

Έτσι είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ άρα } P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$

$$A \cap B = \{AM, KM\}, \text{ με } N(A \cap B) = 2, \text{ άρα:}$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

- $A - B = \{ MM \}$, $N(A - B) = 1$, άρα:

$$P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}.$$

- $B - A = \{ AK, MA, MK, KA \}$, $N(B - A) = 4$, άρα:

$$P(B - A) = \frac{N(B - A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{9}.$$

β) Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το A , όσο και με το B , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα το Γ είναι υποσύνολο του $(A \cup B)' = \{ AA, KK \}$

$$\text{Άρα } \Gamma \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow P(\Gamma) \leq P[(A \cup B)'] \Rightarrow P(\Gamma) \leq \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.

β' τρόπος

Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το A , όσο και με το B , δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα θα είναι:

$$\Gamma = \{ AA \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{1}{9} \text{ ή}$$

$$\Gamma = \{ AA, KK \} \text{ με } P(\Gamma) = \frac{2}{9}.$$

Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή για το $P(\Gamma)$ είναι $\frac{2}{9}$.