# ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx=[f(x)\cdot g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx}$$

## ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

**1.** $\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot \mathbf{e^x dx}=\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{e^x})'\mathbf{dx}$ ◇ $\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot \alpha^{\mathbf{x}}\mathbf{dx}=\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot\left(\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}\right)'\mathbf{dx}$

**i.** $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}dx$

**ii.** $\int_0^2 (xe^x)^2\,dx$

**iii.** $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

**iv.** $\int_0^1 x^2\cdot\alpha^x dx$

**2.** $\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot \eta\mu\mathbf{x}\ \mathbf{dx}=\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot(-\sigma\upsilon\nu\mathbf{x})'\mathbf{dx}$ ◇ $\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot \sigma\upsilon\nu\mathbf{x}\ \mathbf{dx}=\int_\alpha^\beta P(\mathbf{x})\cdot(\eta\mu\mathbf{x})'\mathbf{dx}$

**i.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\eta\mu^2 x}dx$

**ii.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

**iii.** $\int_{\pi}^{2\pi} (x^2+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}dx$

**iv.** $\int_0^{\pi} (x^2-3x)\eta\mu 2x dx$

**v.** $\int_0^{\pi} x\eta\mu^2 x dx$

**vi.** $\int_0^{\pi/2} x^2\sigma\upsilon\nu^2 x dx$

**vii.** $\int_0^{\pi/3} \frac{x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

**viii.** $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x dx$

## 3. $\int_{\alpha}^{\beta} p(\mathbf{x})\cdot\ln\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{P}(\mathbf{x})]'\ln\mathbf{x}\,\mathbf{dx}$ ,*P(x) παράγουσα του p(x)*

**i.** $\int_1^e \ln x dx$

**ii.** $\int_2^4 x\cdot\ln^2 x dx$

**iii.** $\int_0^{e-1} x^2\cdot\ln(1+x)dx$

**iv.** $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

**v.** $\int_{1/e}^1 \frac{\ln x}{x^2}dx$

**vi.** $\int_0^{3/4} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

**vii.** $\int_2^e \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx$

**viii.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x\cdot\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)dx$

**ix.** $\int_1^2 x\cdot\ln\left(xe^x\right)dx$

**x.** $\int_1^e x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

## 4. $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{e}^{\mathbf{x}}\cdot\eta\mu\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\right)'\cdot\eta\mu\mathbf{x}\,\mathbf{dx}$ ◆ $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{e}^{\mathbf{x}}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu\mathbf{x}\,\mathbf{dx}$

**i.** $\int_0^{\pi} e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx$

**ii.** $\int_1^{\pi} \eta\mu(\ln x)dx$

**iii.** $\int_0^1 e^x\sigma\upsilon\nu\pi x dx$

**iv.** $\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu 2x}{e^x}dx$

## 5. ΕΞΩ ΑΠΟ ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΝΟΡΜΕΣ

**i.** $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

**ii.** $\int_2^3 \frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^3}dx$

**iii.** $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$

**iv.** $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

**v.** $\int_0^1 x\varepsilon\varphi^2 x dx$

**vi.** $\int_0^{\pi} \frac{-x}{\eta\mu^2 x}dx$

**vii.** $\int_{\pi/2}^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x)\ln x dx$

**viii.** $\int_0^1 \frac{x^2e^x}{(2+x)^2}dx$

**ix.** $\int_0^1 (2x^3+3x^2-8x+1)\sqrt{2x+6}dx$

**x.** $\int_e^{e+1} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

## B. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

**i.** $I_\nu=\int_0^\pi x^\nu \sigma\upsilon\nu x dx$ , $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $I_\nu=-\nu\pi^{\nu-1}-\nu(\nu-1)I_{\nu-2}, \nu\geq 4$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα για ν=5

**ii.** $I_\nu=\int_0^{\pi/2} x\eta\mu^\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $I_\nu=-\frac{1}{e}+\nu I_{\nu-1}, \nu\geq 2$

**iii.** $I_\nu=\int_0^{\pi/2} \eta\mu^\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $\nu I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}, \nu\geq 2$

**iv.** $I_\nu=\int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $\nu I_\nu=(\nu-1)I_{\nu-2}, \nu\geq 2$

**v.** $I_\nu=\int_0^2 \frac{x^\nu}{x^2+1}dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $I_{\nu+2}+I_\nu=\frac{2^{\nu+1}}{\nu+1}, \nu\in\mathbb{N}^*$

- Να υπολογίσετε το άθροισμα : $S=I_1+...+I_5$

**vi.** $I_\nu=\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $I_\nu=\frac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2}, \nu>2$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^5 x dx$

**vii.** $I_\nu=\int_0^1 \frac{e^{\nu x}}{e^x+1}dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.Να δείξετε ότι : $I_\nu=\frac{e^{\nu-1}-1}{\nu-1}-I_{\nu-1}, \nu\geq 2$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx$

**viii.** $I_\nu=\int_1^e \frac{\ln^\nu x}{x^2}dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ .Να δείξετε ότι : $I_\nu=-\frac{1}{e}+\nu I_{\nu-1}, \nu\geq 2$

- Να δείξετε ότι $I_3=6-\frac{16}{e}$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή $f''$ ,για την οποία ισχύουν: $f''(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\int_0^1 [xf''(x)-2f'(x)]dx=0$ .Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ .

2. Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο[0,π].Αν g(π)=1 και ισχύει $\int_0^\pi [g(x)+g''(x)]\eta\mu x dx=3$ να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(\theta)=3\sigma\upsilon\nu\theta$ .

3. Έστω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή $f''$ ,για την οποία ισχύει: $\int_0^{\pi/2} [f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x dx=0$ .

   i. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f'(0)=0$

   ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f'(0)=f\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ .

4. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με συνεχή $f''$ στο [0,α] και $\int_0^\alpha xf''(x)dx=0$ .Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή $f''$ ,για την οποία ισχύουν: $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\int_0^1 [xf''(x)-2f'(x)]dx=0$ .Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ .

6. Έστω μια συνάρτηση g με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο[0,π].Αν g(π)=1 και ισχύει $\int_0^\pi [g(x)+g''(x)]\eta\mu x dx=3$ να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(\theta)=3\sigma\upsilon\nu\theta$ .

7. Έστω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή $f''$ ,για την οποία ισχύει: $\int_0^{\pi/2} [f(x)+f''(x)]\sigma\upsilon\nu x dx=0$ .

   iii. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f'(0)=0$

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+f'(0)=f\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με συνεχή $f''$ στο $[0,\alpha]$ και $\int_0^\alpha xf''(x)dx=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

9. Έστω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή $f''$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$, για την οποία ισχύει: $\int_0^{\pi/2}\left[f(x)+f''(x)\right]\text{συν}x\,dx=2$. Να υπολογίστε το $f'(0)$.

10. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(\alpha)=f(\beta)=g(\alpha)=g(\beta)=0$ να αποδείξετε ότι : $\int_a^\beta f''(x)g(x)dx=\int_a^\beta f(x)g''(x)dx$ .

11. Έστω F(x) αρχική συνάρτηση της $f(x)=e^{x^2}$ για την οποία ισχύει F(1)=0.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1 F(x)dx$ .

12. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f'\left(x^3+2x\right)=4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ .Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε : $f\left(x^3+2x\right)=3x^4+4x^2+c$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 xf''(x)dx$.

$$Life=\int_{birth}^{death}\frac{happiness}{time}\,\Delta\, time$$