ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

Β1.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α.Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.
β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 4,5

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=ημ2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\lvert x \rvert$, $x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z \in C$ με $z \neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α.Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$w_1=f(9-5i)$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004}$$

Μονάδες 6

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y=x

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Μονάδες 5

γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει: ΜΧ=Κ , όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

Μονάδες 7

β. υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t)=\frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2},\quad t\geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)</u>

Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>να μην τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

Να απαντήσετε <u>στο τετράδιό σας</u> σε όλα τα θέματα.

Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α.
α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;

Μονάδες 2,5

β)Αν Μ(x,y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ δεδομένο διάνυσμα και Μ΄(x΄,y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$.

Μονάδες 5

γ)Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β1.Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
T_1: «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x»	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2: «στροφή κατά γωνία π/2»	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

Β2.Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα $A = A_1A_2 - A_2A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως, του ερωτήματος Β1.
α)Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός.

Μονάδες 4,5

β)Να βρείτε την εικόνα της ευθείας ε: 2x - y + 5 = 0 μέσω του μετασχηματισμού Τ.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi, $\alpha,\beta \in R$.

Μονάδες 4

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν θ = Argz, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

Α. $\dfrac{\pi}{4}-\theta$ Β. $\dfrac{\pi}{2}+\theta$ Γ. $\theta-\dfrac{\pi}{2}$ Δ. $\pi+\theta$

Μονάδες 3

δ) Το z^4 είναι ίσο με:

Α. 4 Β. 4i Γ. - 4i Δ. -4

Μονάδες 3

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1 .$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & , \quad 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)\ e^{5-x}, & \quad x\geq 5 \end{cases}$$

Α. Να βρεθούν τα, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

Μονάδες 6

Β. Να βρεθούν τα α, β $\in$ R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος Β να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).

Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Αν Α είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$A\,X = B \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Μονάδες 6,5

β. *Στις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε τον αριθμό της ερώτησης (**1.Α.β.1** και **1.Α.β.2**) και δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

Α. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$ **Β.** $\beta = \delta = 0$ **Γ.** $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = 0$

Δ. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ **Ε.** $\alpha = \gamma = 0$

Μονάδες 3

2. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Ο αντίστροφος του πίνακα Α, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο:

Α. $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Β.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$

Γ. $A^{-1} = D \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Δ.** $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$

Ε. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

Β. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα Α

είναι ο πίνακας $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $A\,X = B$

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8i$ και $z_2 = 4 - 5i$.

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Μονάδες 8

γ. Αν $z = z_1 - \bar{z}_2$ να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1}, & x < 1 \\ \alpha x - 2\alpha + 3, & x \geq 1 \; . \end{cases}$$

α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10\,, \qquad 1 < x < 5.$$

α. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και για $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα).

Μονάδες 12

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Στη στήλη Ι του επόμενου πίνακα δίνονται ορισμένα σύμβολα και παραστάσεις που έχουν σχέση με το μιγαδικό αριθμό z. Κάθε ένα από αυτά είναι ίσο με μία μόνο από τις εκφράσεις που δίνονται στη στήλη ΙΙ

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. $Re(z)$	**1.** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
Β. $\lvert z\rvert$	**2.** β
Γ. $\bar{z}$	**3.** βi
Δ. $z\,\bar{z}$	**4.** $\alpha - \beta i$
Ε. $z + \bar{z}$	**5.** $\alpha^2 + \beta^2$
ΣΤ. $z - \bar{z}$	**6.** α
Ζ. $Im(z)$	**7.** 2α
	8. $2\beta i$
	9. $-\alpha + \beta i$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 14

Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 3-4i. Να βρείτε :

α) το πραγματικό μέρος Re(z) και το φανταστικό μέρος Im(z) του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 3

β) τον συζυγή $\bar{z}$ του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 4

γ) το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού z.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $A^2 = 2A - I$.

Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι ισχύει $A\,(2I - A) = I$.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τον πίνακα X ώστε να ισχύει $2X - I = A^2$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

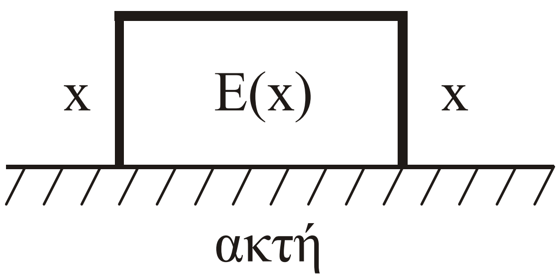
Μονάδες 12

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -2x^2 + 600x$$

(υποθέτουμε ότι $0 < x < 300$).

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν E(x) της περιοχής να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 14

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

β. Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

Μονάδες 4,5

Β.1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 2,5

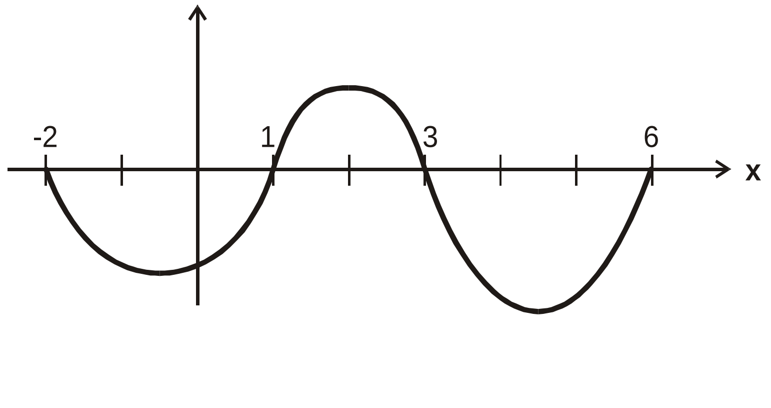
β. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2ημx + \frac{1}{ημ^2x} + 3$, όπου $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 2,5

γ. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in Δ$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 2,5

Β.2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας



συνάρτησης f στο διάστημα [-2,6].

Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+2z+2=0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

Μονάδες 12

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας z_1 η εικόνα της ρίζας z_2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x} = 5$.

α. Να βρείτε το f(0).

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

Μονάδες 9

γ. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}$.

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

Μονάδες 5

Α.2. Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1) και $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 + iημθ_2) δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\frac{z_1}{z_2}$	1. $\rho_1\rho_2$[ημ$(\theta_1+\theta_2)$+iσυν$(\theta_1+\theta_2)$]
β. $z_1 \cdot z_2$	2. ρ_1^{ν} [συν$(\nu\theta_1)$+iημ$(\nu\theta_1)$]
γ. z_1^{ν}	3. $\frac{\rho_1}{\rho_2}$[συν$(\theta_1+\theta_2)$+iημ$(\theta_1-\theta_2)$]
	4. $\frac{\rho_1}{\rho_2}$[συν$(\theta_1-\theta_2)$+iημ$(\theta_1-\theta_2)$]
	5. $\rho_1\rho_2$[συν$(\theta_1+\theta_2)$+iημ$(\theta_1+\theta_2)$]
	6. ρ_1^{ν} [ημ$(\nu\theta_1)$-iσυν$(\nu\theta_1)$]

Μονάδες 7,5

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = 2\left(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = \text{συν}\dfrac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{5\pi}{3}$.

Τότε το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με: Α: 2 Β: 2i Γ: -2 Δ: -2i

Ε: 2 (1-i)

Μονάδες4,5

Β.2.Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 1 + i. Να υπολογίσετε το z^{16}.
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούμε τον πίνακα Α διάστασης $(\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (\kappa + 2\lambda - 3)$ και τον πίνακα Β διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο Α · Β

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α και Β, για να ορίζονται τα γινόμενα Α · Β και Β · Α

Μονάδες 10

Β. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι: **α.** $A^2 = -I$, όπου I ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας.

Μονάδες 4

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2I$, όπου I ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(-2,3).

Μονάδες 10

γ. Αν $α > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση: $K(x) = 10\left(x + \frac{16}{x} + 40\right)$ όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του **β.** ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

Μονάδες 4