1. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\cdot\ f(1)=0$

$\cdot\ x^2\cdot f'(x)+1=4\int_1^e f(x)dx - x f(x)\ ,\ x>0.$

α). Ν.δ.ο. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\ ,\ x>0$

Θεωρούμε $\boxed{c=\int_1^e f(x)\,dx}$ οπότε έχουμε:

$x^2\cdot f'(x)+1=4c-x\cdot f(x) \iff$

$\iff x^2 f'(x)+x\cdot f(x)=4c-1 \iff$

$\overset{:x>0}{\iff} x f'(x)+f(x)=\dfrac{4c-1}{x} \iff$

$\iff (x\cdot f(x))'=[(4c-1)\cdot \ln x]'$ συνεχείς στο $(0,+\infty)$

$\implies x\cdot f(x)=(4c-1)\cdot\ln x + c_1$ Για $x=1$: $c_1=0$.

Άρα $\boxed{f(x)=\dfrac{(4c-1)\cdot\ln x}{x}\ ,\ x>0.}$

Τελικά: $c=\int_1^e \dfrac{(4c-1)\cdot\ln x}{x}dx \iff c=(4c-1)\int_1^e (\ln x)'\ln x\,dx$

$\overset{\cdot 2}{\iff} 2c=(4c-1)\int_1^e 2\ln x\cdot(\ln x)'dx$

$\iff 2c=(4c-1)\Big[\ln^2 x\Big]_1^e$

$\iff 2c=4c-1$

$\iff \boxed{c=\frac{1}{2}}$

Οπότε $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0.$

β) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση.

Για $x>0$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, αφού $x^2>0$. $1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e$.

$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$, αφού $x^3>0$. $2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{3/2} = e\cdot\sqrt{e}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{-\infty}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x = -\infty$, αφού $\lim x = 0$ και $x>0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \dots = 0$.

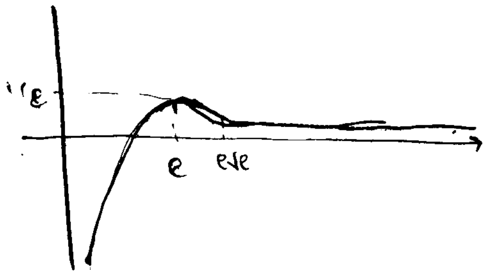
ΠΣΤ:

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f''		$-$		$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

και

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ο.Μ. $f(e) = \frac{1}{e}$



γ) Ν.δ.ο. $a^{a+1} > (a+1)^a$, $\forall\, a>e$.

$\overset{a>0}{\Leftrightarrow} \ln a^{a+1} > \ln(a+1)^a$

$\Leftrightarrow (a+1)\ln a > a\ln(a+1)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln(a+1)}{a+1}$

$\Leftrightarrow f(a) > f(a+1)$

$\overset{a>e}{\Leftrightarrow}$ $a < a+1$. ισχύει!

δ). Ν.δ.ο. $2^x = x^2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Προφανείς $x=2$, $x=4$.

$2^x = x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 = 2\ln x$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$

$\Leftrightarrow f(x) = f(2)$.

Για $0<x<e$ η f γν. αύξουσα → το πολύ $2\in(0,e)$ Άρα ακριβώς μία

Για $x>e$ η f γν. φθίνουσα Άρα ακριβώς μία $4\in(e,+\infty)$

ε) Ν.δ.ο. οι γραφικές παραστάσεις των C_f και C_g των συναρτήσεων f και $g(x)=-x^2$ αντιστοίχως έχουν μία τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

Έστω $A(a, f(a))$ το σημείο επαφής της f με την εφαπτόμενη

έχουμε $y-f(a)=f'(a)(x-a) \iff y=f'(a)x-af'(a)+f(a)$.

Αντίστοιχα $B(\beta, g(\beta))$ ..... $y=g'(\beta)x-\beta g'(\beta)+g(\beta)$

Για να έχουν κοινή απαιτούμε.

$$\begin{cases} f'(a)=g'(\beta) \\ \text{και} \\ -af'(a)+f(a)=-\beta g'(\beta)+g(\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1-\ln a}{a^2}=-2\beta \\ \dfrac{\ln a}{a}-a\dfrac{1-\ln a}{a^2}=-\beta^2-\beta\cdot(-2\beta) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \beta=\dfrac{\ln a-1}{2a^2} \\ \beta^2=\dfrac{2\ln a-1}{a} \end{cases} \iff \frac{(\ln a-1)^2}{4a^4}=\frac{2\ln a-1}{a}$$

$$\overset{a>0}{\iff} \underbrace{2\ln a-1-\frac{(\ln a-1)^2}{4a^3}}_{\phi(a)}=0.$$

$\phi(a)$ συνεχής $[1, e]$

$\phi(1)=\left(-\frac{5}{4}\right)$

$\phi(e)=1$

$\xrightarrow{\text{Θ.Β}}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τ.ω. $\phi(x_0)=0$.

Δηλ. το σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση.

Άρα C_f και C_g έχουν τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-x^2$ και ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $A,B \in C_f$, $\Gamma,\Delta \in x'x$ και $\Gamma(x,0)$ με $x\in(0,2)$.

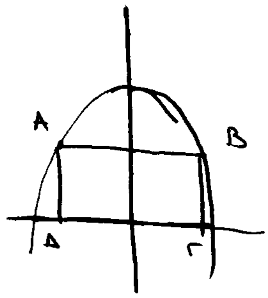
α) Να βρείτε $x\in(0,2)$ τ.ω. το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει μέγιστο εμβαδό.

Έχουμε $A(x_A, 4-x_A^2)$

$B(x_B, 4-x_B^2)$

$\Gamma(x,0)$ και $\Delta(-x,0)$.

$x_B=-x_A$ + $y_B=y_A$



$(AB\Gamma\Delta)=$ βάση · ύψος $=2x\cdot(4-x^2)=8x-2x^3$, $x\in(0,2)$.

Οπότε $E(x)=8x-2x^3 \Rightarrow E'(x)=8-6x^2=2(4-3x^2)$.

x	0		$\frac{2\sqrt3}{3}$		2
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα στο $x_0=\frac{2\sqrt3}{3}$ έχουμε το μέγιστο εμβαδό.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^x)<f(e^{1-x^2})$ στο $(0,+\infty)$.

Ισχύει $x^x>0$ και $e^{1-x^2}>0$ για $x\in(0,+\infty)$.

$f'(x)=-2x<0$, για κάθε $x>0$. Άρα $f \searrow$ στο $(0,+\infty)$.

Οπότε $f(x^x)<f(e^{1-x^2}) \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow} x^x>e^{1-x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\ln x>1-x^2 \Leftrightarrow x\ln x+x^2-1>0.$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{x=1}$

$\overset{:x>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{\ln x+2x-\frac{1}{x}>0.}$ (1)

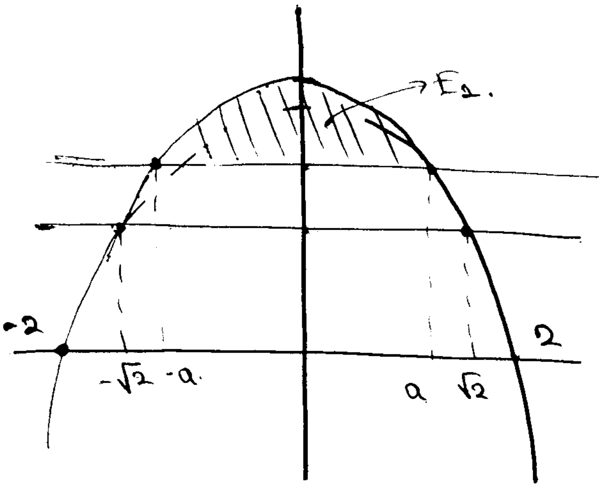
Θεωρούμε $g(x)=\ln x+2x-\frac{1}{x} \Longrightarrow g'(x)=\frac{1}{x}+2+\frac{1}{x^2}>0$

Άρα g γν. αύξουσα.

Οπότε (1) $\Leftrightarrow g(x)>g(1) \overset{g\nearrow}{\Longleftrightarrow} x>1$

Αφού το συναληθεύω με π. ορισμού.

(γ) Το χωρίο που περικλείεται απ'την C_f και την $y=2$ χωρίζεται απ'την ευθεία $y=4-a^2$, $0<a<2$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.



Αφού $a<2$ τότε $4-a^2>2$

Κοινά Σημεία

$f(x)=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ή $-\sqrt{2}$

$f(x)=4-a^2 \Leftrightarrow x^2=a^2 \Leftrightarrow x=a$ ή $x=-a$

Το εμβαδόν που ορίζεται από $f(x)$ και $y=2$ είναι

$$E=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-x^2-2)dx=\dots=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Το εμβαδόν που ορίζεται από $f(x)$ και $y=4-a^2$ είναι

$$E_1=\int_{-a}^{a}(4-x^2-4+a^2)dx=\dots=\frac{4a^3}{3}$$

Αφού όμως είναι ισεμβαδικά $E_1=\frac{E}{2}$

$$\frac{8\sqrt{2}}{3}=\frac{4a^3}{3} \Rightarrow a^3=\sqrt{2} \Rightarrow a=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x<1 \\ e^{x-1}+\ln x-2, & x\geq 1. \end{cases}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια.

Για $x<1$ η f συνεχής ως ρητή

Για $x>1$ -״- ως άθροισμα συνεχών.

Για $x=1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, αφού $\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0$ και $x-1<0$.

Άρα η f συνεχής στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία-κυρτότητα.

Για $x<1$: $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow f \searrow$ στο $(-\infty,1)$

Για $x>1$: $f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x}>0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$

Αφού f όχι συνεχής στο $x_0=1$ $\Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

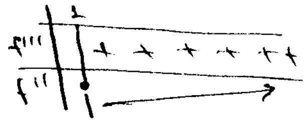
*** αλλά η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=-1$.

Για $x<1$: $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}<0 \Rightarrow f$ ∩ στο $(-\infty,1)$

Για $x>1$: $f''(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}>0 \Rightarrow f$ ∪ στο $[1,+\infty)$.

αφού $f'''(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{x^3}>0$

προφανής ρίζα $x_0=1$



γ) σύνολο τιμών.

$A_1=(-\infty,1) \xrightarrow[\nearrow]{f \text{ συνεχής}} f(A_1)=\left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=(-\infty,0)$

$A_2=[1,+\infty) \xrightarrow[\nearrow]{f \text{ συνεχής}} f(A_2)=\left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=[-1,+\infty)$.

Επομένως $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\mathbb{R}$.

δ) Ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1,2)$

Θ. Bolzano στο $(1,2)$ + μονοτονία στο $[1,+\infty)$.

ε) Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

Παρατηρούμε $f(0)=f(1)=-1$. Άρα f όχι "1-1" $\Rightarrow$ όχι αντιστρέψιμη.

στ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$.

$f(x)=a$

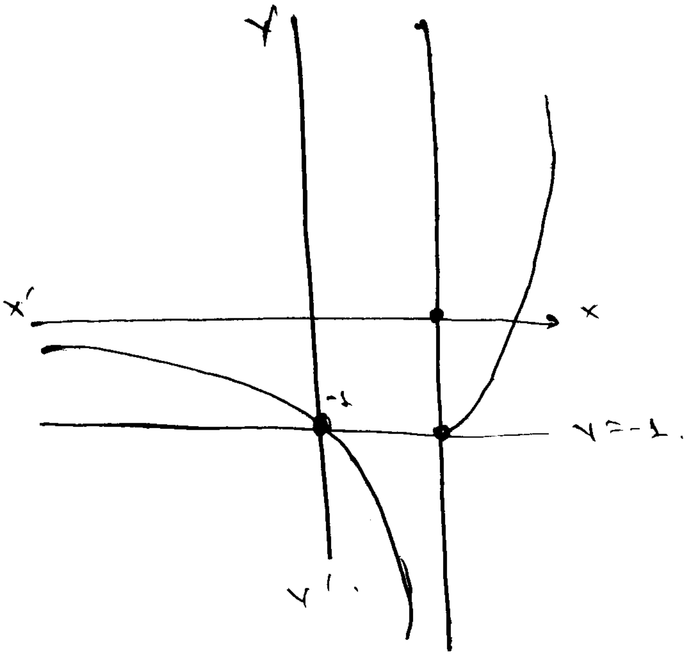
Αν $a<-1$: ακριβώς μία $a\in f(A_1)$

Αν $a=-1$: $f(x)=-1$ ακριβώς δύο

Αν $-1<a<0$: ακριβώς δύο

Αν $a=0$: $f(x)=0$ ακριβώς μία

Αν $a>0$: ακριβώς



ζ) Ν.δ.ο. για κάθε $\kappa>1$ υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,+\infty)$ τ.ω., να ισχύει $f(\xi)=\dfrac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$.

Έχουμε $f(x)>-1$ για $x>+1$ οπότε:

$f(\kappa)>-1$

$f(\kappa+1)>-1 \overset{\kappa>0}{\Longleftrightarrow} \kappa f(\kappa+1)>-\kappa$

(+) $f(\kappa+2)>-1 \overset{(\kappa+1)>0}{\Longleftrightarrow} (\kappa+1)f(\kappa+2)>-\kappa-1$

$f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)>-2(\kappa+1)$. $\overset{\kappa+1>0}{\Longleftrightarrow}$

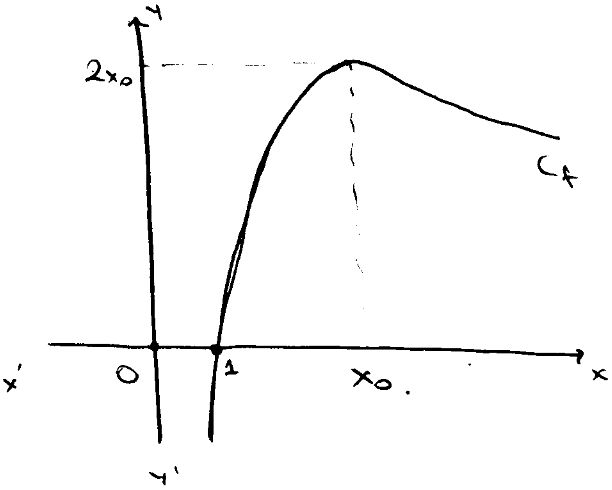
$\Leftrightarrow \dfrac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}>-1$

Άρα ο αριθμός ανήκει στο $[-1,+\infty)$

Άρα υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,+\infty)$ τ.ω. $f(\xi)=\dfrac{f(\kappa)+\kappa f(\kappa+1)+(\kappa+1)f(\kappa+2)}{2(\kappa+1)}$

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- δύο φορές παραγωγίσιμη $(0,+\infty)$
- παρουσιάζει μέγιστο στη θέση x_0 με τιμή $f(x_0)=2x_0$.
- $f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,2x_0]$
- έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$.



α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-2x}{(x-x_0)f(x)}$

i) Αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.
Άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$.

Για $0<x<1$ έχουμε $f(x)<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$
$x>1$ $\quad f(x)>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$
Άρα δεν υπάρχει.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+f(x)}{\sqrt{x^2+1}-1} \overset{:x}{=} \lim \dfrac{1+\frac{f(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} = \dfrac{1+0}{1}=1$, αφού $y=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

$*\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \overset{x>0}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = 1.$

iii) Για x κοντά στο x_0.

$\dfrac{f(x)-2x}{(x-x_0)\cdot f(x)} = \dfrac{f(x)-2x}{x-x_0}\cdot\dfrac{1}{f(x)}$

$=\left(\dfrac{f(x)-\overset{f(x_0)}{2x_0}}{x-x_0}-\dfrac{2(x-x_0)}{x-x_0}\right)\dfrac{1}{f(x)}.$

→ f παραγωγίσιμη άρα συνεχής.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} \dfrac{1}{f(x_0)}=\dfrac{1}{2x_0}.$

5. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση: $f(f(x))=2g(x)-x$

α) ν.δ.ο. η g είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τ.ω. $x_1<x_2 \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_1)>f(x_2) \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))$

$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} 2g(x_1)-x_1<2g(x_2)-x_2 \\ x_1<x_2 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} g(x_1)<g(x_2)$

Άρα $g\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την μονοτονία της $h(x)=f(x)-g(x)$.

Έστω $x_1<x_2 \left.\begin{matrix} \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_1)>f(x_2) \\ \underset{-g\downarrow}{\overset{g\uparrow}{\Longrightarrow}} -g(x_1)>-g(x_2) \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} h(x_1)>h(x_2)$

Άρα $h\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=x_0$

γ) Ν.δ.ο. C_f και C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

$f(f(x))=2g(x)-x \overset{x=x_0}{\Longrightarrow} f(f(x_0))=2g(x_0)-x_0$

$\Longrightarrow f(x_0)=2g(x_0)-x_0$

$\Longrightarrow x_0=2g(x_0)-x_0$

$\Longrightarrow g(x_0)=x_0=f(x_0)$.

$\Longrightarrow g(x_0)=f(x_0) \Longrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$.

$\Longrightarrow h(x_0)=0$

$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} x_0 \text{ ρίζα της } h \\ + \\ h \text{ γν. φθίνουσα } \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \to x_0$ μοναδική.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x+x_0+1))+\ln x+1<x_0$.

Για $x>0$ έχουμε:

$f(f(\ln x+x_0+1))+\ln x+1<x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2g(\ln x+x_0+1)-(\ln x+x_0+1)+\ln x+1<x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2g(\ln x+x_0+1)<2x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(\ln x+x_0+1)<x_0 \Rightarrow$

$\overset{\gamma)}{\Rightarrow} g(\ln x+x_0+1)<g(x_0) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} \ln x+x_0+1<\cancel{x_0}$

$\Rightarrow \ln x<-1$

$\Rightarrow x<\frac{1}{e}$

Τελικά $0<x<\frac{1}{e}$.

8. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{1-x}{x}$ και της κατακόρυφης $x=2$.

$A_f:(0,+\infty)$ και $A_g:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

f γν. αύξουσα $\qquad g$: γν. φθίνουσα κατα διαστήματα.

$f(x)=g(x) \Rightarrow x=1$ προφανής (μοναδική στο $(0,+\infty)$ $\left(\begin{matrix} f\uparrow \\ g\downarrow \end{matrix}\right)$)

Άρα $E(\Omega)=\int_1^2 |f(x)-g(x)|dx = \int_1^2 \left|\ln x-\frac{1-x}{x}\right|dx$

$=\int_1^2 \left|\ln x-\frac{1}{x}+1\right|dx \overset{(*)}{=} \int_1^2 \ln x+1-\frac{1}{x}\,dx=\ldots=\ln 2$

* αφού $1<x<2 \Rightarrow \frac{1}{x}<1$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

i) Ν.δ.ο. η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2x+1$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (\lambda x + \beta)\right) = 0 \iff$

$\iff \lim\limits_{x\to+\infty} \left(- \dfrac{1}{x \cdot \ln x} \right) = 0$ αφού $\lim (x\cdot \ln x) = +\infty$.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, $y = 2x+1$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = e$ και $x = e^2$.

Το $E(\Omega) = \displaystyle\int_e^{e^2} |f(x) - 2x - 1|\,dx = \int_e^{e^2} \left| - \frac{1}{x\ln x} \right| dx$

$= \displaystyle\int_e^{e^2} \left| \frac{1}{x\ln x} \right| dx \;\overset{\substack{x>0 \\ \text{αφού } x>e}}{\underset{\ln x>0}{=}}\; \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

$= \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^2} = \ln 2$ τ.μ.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\cdot\ln x$, $x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x,y)$ με $\frac{1}{e} \le x \le 1$ και $f(x) \le y \le 0$.

Για $x < 1 \xrightarrow[\nearrow]{\ln x} \ln x < \ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) < 0$ όταν $\frac{1}{e} \le x < 1$.

Το χωρίο Ω δημιουργείται από τον $x'x$ $(y=0)$ την $f(x)$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = 1$.

$E(\Omega) = \displaystyle\int_{1/e}^{1} |f(x)|\,dx = -\int_{1/e}^{1} x\ln x\,dx = -\int_{1/e}^{1} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \ldots = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$ τ.μ.

9. Να λύσετε την εξίσωση

$$(a+1)^x + (a+3)^x = (a+4)^x + a^x, \ a>0, \ x\in\mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)=t^x$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

$$(a+1)^x + (a+3)^x = (a+4)^x + a^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^x - a^x = (a+4)^x - (a+3)^x. \quad (1)$$

• ΘΜΤ. $[a, a+1] \to f'(\xi_1) = f(a+1) - f(a) = (a+1)^x - a^x$

• ΘΜΤ. $[a+3, a+4] \to f'(\xi_2) = f(a+4) - f(a+3) = (a+4)^x - (a+3)^x$

Όμως $f'(t) = (t^x)' = x\cdot t^{x-1}$.

Δηλ. $f'(\xi_1) = x\cdot \xi_1^{x-1}$ και $f'(\xi_2) = x\cdot \xi_2^{x-1}$.

Άρα $(1) \Leftrightarrow x\cdot \xi_1^{x-1} = x\cdot \xi_2^{x-1}$

$\Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=1}$.

10. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
Ν.δ.ο. υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f(\alpha)=f(\beta)\cdot e^{(\alpha-\beta)\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

• $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)\cdot e^{(\alpha-\beta)\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}>0$

$$f(\alpha)=f(\beta)\cdot e^{(\alpha-\beta)\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\ln}{\Leftrightarrow} \ln(f(\alpha))=\ln f(\beta)+(\alpha-\beta)\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=\underbrace{-(\alpha-\beta)}_{\beta-\alpha}\cdot\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \quad (1).$$

Θεωρούμε $g(x)=\ln(f(x))$

ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$ $\longrightarrow$ $g'(\xi)=\dfrac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ισχύει

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=-1$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει ότι: $(x^2+x)f'(x)=x+f(x)$.

$$(x^2+x)f'(x)=x+f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)f'(x)=x+f(x) \Leftrightarrow$$

$:x^2>0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x}\cdot f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{f(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)+\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x)=(\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)\right]'=(\ln x)' \xRightarrow{\text{συνεχής } [0,+\infty)}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)=\ln x+c$$

Για $x=1$, $c=-2$ οπότε

$$f(x)=\frac{\ln x-2}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x(\ln x-2)}{\frac{x+1}{x}}.$$

12. Αν η ευθεία $y=5x-4$ είναι ασύμπτωτη της C_f να βρείτε το $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{af(x)+6x}{xf(x)-5x^2+7x}=-3$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{af(x)+6x}{xf(x)-5x^2+7x}=-3 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{af(x)}{x}+\frac{6x}{x}}{\frac{xf(x)}{x}-\frac{5x^2}{x}+\frac{7x}{x}}=-3$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a\frac{f(x)}{x}+6}{(f(x)-5x)+7}=-3 \Leftrightarrow \frac{5a+6}{-4+7}=-3$$

$$\Leftrightarrow a=-3$$

13. Η τιμή πώλησης μιας συσκευής είναι 500€. Το κόστος της προσεγγίζεται από τον τύπο της $K(t)=t^2+\frac{54}{t}$, $t>0$ (t σε ώρες)

α) Να βρείτε την συνάρτηση του κέρδους

$$P(t)=500-K(t)=500-t^2-\frac{54}{t}, \quad t>0$$

β) να βρείτε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

$$P'(t)=-2t+\frac{54}{t^2}=\frac{-2t^3+54}{t^2}, \quad t>0.$$

t	0		3		$+\infty$
P'		+	0	−	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

$P(3)=473€$

γ). Ν.δ.ο αν η συσκευή κατασκευάζεται σε 2 ώρες έχουμε μεγαλύτερο κέρδος από όταν κατασκευάζεται σε μία ώρα.

Αφού $P \nearrow (0,3]$ ισχύει $1<2 \Longrightarrow P(1)<P(2)$.

14. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη με $\alpha<0<\beta$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=3\beta$ και $f(\beta)=3\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

α). Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

$$\left.\begin{aligned} &f \text{ συνεχής } [\alpha,\beta] \\ &f(\alpha)\cdot f(\beta)=9\alpha\beta<0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\Theta B} \text{τουλάχιστον μία ρίζα στο } (\alpha,\beta)$$

β) υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. η εφαπτομένη της $g(x)=f(x)+3x$ στο ξ_1 να είναι παράλληλη στον $x'x$.

$$\left.\begin{aligned} &g \text{ συνεχής } [\alpha,\beta] \\ &g \text{ παραγ. } (\alpha,\beta) \\ &g(\alpha)=f(\alpha)+3\alpha=3\alpha+3\beta \\ &g(\beta)=f(\beta)+3\beta=3\alpha+3\beta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\Theta.R} \text{υπάρχει } \xi_1\in(\alpha,\beta) \text{ τ.ω } g'(\xi_1)=0$$

γ. υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω. η εφαπτομένη της C_f στο $N(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x-3y+1=0$.

$x-3y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\boxed{f'(\xi_2)=-3}$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής } [\alpha,\beta] \\ f \text{ παραγ. } (\alpha,\beta) \end{array}\right\} \overset{\Theta MT}{\Longrightarrow} f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=-3$

δ. Η f παίρνει την τιμή $\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$

f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

$f(\alpha) > \frac{3}{2}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow 3\beta > \frac{3}{2}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \cancel{3}\beta > \cancel{3}\alpha$ ισχύει

$f(\beta) < \frac{3}{2}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow 3\alpha < \frac{3}{2}(\alpha+\beta) \Leftrightarrow \cancel{3}\alpha < \cancel{3}\beta$ -//-

Άρα $f(\beta) < \frac{3}{2}(\alpha+\beta) < f(\alpha)$

Οπότε σύμφωνα με Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω. $f(x_0)=\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x$.

α). Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-1)-f(1-x)=e^{1-x^2}-e^{x-1}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$f(x^2-1)-e^{1-x^2}=f(1-x)-e^{x-1}$. Θεωρούμε $g(x)=f(x)-e^{-x}$

$\Leftrightarrow g(x^2-1)=g(1-x) \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow g(x)=x^3+x-e^{-x}$

$\Leftrightarrow x^2-1=1-x \Leftrightarrow$ $\Rightarrow g'(x)=3x^2+1+e^{-x}>0$.

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$ $\begin{cases}1\\-2\end{cases}$ δεκτές. Άρα $g\uparrow \Rightarrow g$ "1-1"

β). Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^a)}{e^{|x|}-1}$.

- $x\neq0 \Rightarrow |x|>0 \Rightarrow e^{|x|}>e^0 \Rightarrow e^{|x|}-1>0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0} e^{|x|}-1=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^{|x|}-1}=+\infty$

και

$e^a>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(e^a)>f(0)=0$ Άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^a)}{e^{|x|}-1}=0$.

γ). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} f(\varepsilon\varphi x)\,dx$

$$\int_0^{\pi/4} f(\varepsilon\varphi x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi^3x+\varepsilon\varphi x\,dx=\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi^2x+1\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x\left(\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}+1\right)dx=\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\varepsilon\varphi x\cdot(\varepsilon\varphi x)'\,dx=\left[\frac{\varepsilon\varphi^2x}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$$

16. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και ισχύουν:

- $xf(x) \geq e^x - \ln(x^2+1) - 1,\ x\in\mathbb{R}$
- $(f^2(x))' \neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $\int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)\,dx = 0,\ x\in\mathbb{R}$.

α). ν.δ.ο. $f(0)=0$.

$xf(x) \geq e^x - \ln(x^2+1) - 1 \iff xf(x) - e^x + \ln(x^2+1) - 1 \geq 0$.

Θεωρούμε $g(x) = xf(x) - e^x + \ln(x^2+1) - 1$.

Παρατηρούμε $g(0)=0$.

Άρα $g(x) \geq g(0)$ (ολ. ελάχιστο)

+

g παραγωγίσιμη με $g'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x + \dfrac{2x}{x^2+1}$

+

$x=0$ εσωτερικό σημείο.

Άρα <u>Θ.F.</u> $g'(0)=0 \iff \ldots \iff f(0)=1$.

β). ν.δ.ο. $f(1)=2$.

$(f^2(x))' \neq 0 \iff 2f(x)\cdot f'(x) \neq 0 \iff f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$

- f συνεχής και $f'(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$ $\Big\}$ ⟶ διατηρεί πρόσημο $\mathbb{R}$ + $f(0)=1>0$ $\Big\}$ $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)\,dx = 0$. Αν $f(0)<f(1)-1 \Rightarrow \int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)\,dx > 0$ άτοπο

Αν $f(0)>f(1)-1 \Rightarrow \int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)\,dx < 0$ άτοπο

αφού f συνεχής και $f(x)>0 \Rightarrow \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx > 0$.

Άρα $f(0)=f(1)-1 \Leftrightarrow f(1)=2$.

(ii) $\int_{f(0)}^{f(1)-1} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow F(f(1)-1)-F(f(0))=0$ F παράγουσα της f.

$\Leftrightarrow f(1)-1=f(0) \Leftrightarrow \ldots$

$F'(x)=f(x)>0 \Rightarrow F \nearrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow F$ "1-1"

17. Αν $0<f^{-1}(x)\le 1$ για κάθε $x\le 0$ να βρείτε $\lim_{x\to 0}\left[x^2\cdot f^{-1}(x)\right]$

$0<f^{-1}(x)\le 1 \xrightarrow{x^2>0} 0<x^2 f^{-1}(x)\le x^2$

Από κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to 0} x^2\cdot f^{-1}(x)=0$

18. Δίνεται $f(f(x))+f(x)=3x+2$, $x\in\mathbb{R}$ $f(1)=3$ και f "1-1".

Να βρεθεί $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f(f(x))+f(x)-2}$

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{3x}+\dfrac{1}{3}\right)$.

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|=\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Rightarrow -\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$

Από κρ. παρεμβολής $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

Όμοιως $\lim\dfrac{\eta\mu x}{3x}=0$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{2x}-1)-\ln(2x)$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

ii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt=+\infty$.

iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt=0$.

Λύση

i. Πρέπει $e^{2x}-1>0$ και $2x>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e^0$ και $x>0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\left(\ln(e^{2x}-1)\right)'-\left(\ln(2x)\right)'=\frac{1}{e^{2x}-1}(e^{2x}-1)'-\frac{1}{2x}(2x)'=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}=$$
$$\frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x(e^{2x}-1)}=\frac{g(x)}{x(e^{2x}-1)}$$, όπου $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$.

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1$, έτσι έχουμε $g'(x)=2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}=4xe^{2x}>0$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}(2xe^{2x}-e^{2x}+1)=0$

x	0	$+\infty$
g'		+
g	**0**	$\nearrow$

Άρα $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$

Επίσης

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln(e^{2x}-1)-\ln(2x)\right)=\lim_{x\to0}\left(\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right)\overset{(*)}{=}\lim_{u\to1}\ln u=0,\quad (*)\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{2x}-1)-\ln(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\right]\overset{(**)}{=}\lim_{y\to+\infty}\ln y=+\infty,$$

$$(**)\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2}=+\infty$$

Ακρότατα η συνάρτηση f δεν έχει

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty).$$

ii. Αν $x+2<t<x+3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+2)<f(t)<f(x+3) \Rightarrow \int_{x+2}^{x+3} f(x+2)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \int_{x+2}^{x+3} f(x+3)dt$

$$f(x+2)\int_{x+2}^{x+3} 1dt < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)\int_{x+2}^{x+3} 1dt \Rightarrow f(x+2) < \int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < f(x+3)$$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} < \displaystyle\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt < \ln\dfrac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)}$ **(1)** και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2(x+2)}-1\right)'}{\left(2(x+2)\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2(x+2)}}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2(x+2)}-1}{2(x+2)} = +\infty$$

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^{2(x+3)}-1}{2(x+3)} = +\infty$

άρα από το κριτήριο της παρεμβολής η **(1)** μας δίνει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{x+2}^{x+3} f(t)dt = +\infty$

iii. Αν $\dfrac{2}{x}<t<\dfrac{3}{x} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{2}{x}\right)<f(t)<f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{2}{x}\right)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f\left(\frac{3}{x}\right)dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}f\left(\frac{2}{x}\right) < \int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < \frac{1}{x}f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right) < x\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} f(t)dt < f\left(\frac{3}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$\ln\left(\dfrac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) < \displaystyle\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt < \ln\left(\dfrac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right)$, **(1)**

έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) \overset{\frac{2}{x}=h}{=} \lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^{2\frac{2}{x}}-1}{2\frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) \overset{\frac{3}{x}=h}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{e^{2h}-1}{2h}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to0}\left(\frac{2e^{2h}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2\frac{3}{x}}-1}{2\frac{3}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής στη σχέση **(1)**, έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{\frac{2}{x}}^{\frac{3}{x}} xf(t)dt = 0$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(6x^2+3)(x^2+1)-(2x^3+3x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+3x^2+\cancel{6x^2}+3-4x^4-\cancel{6x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2}>0$$

Αφού $2x^4+3x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=2\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3+3x}{x^2+1}}{x}=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}-2x\right)=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2x^3-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

iv. Έχουμε: $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\frac{2t^3+3t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\frac{2t^3+2t+t}{t^2+1}dt=$

$$=\int_0^x\left(\frac{2t(t^2+1)+t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\left(2t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x 2tdt+\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\left[t^2\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln 1\right]=x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x^2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2)'}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'}{2x}=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{2}\cdot 0=1.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=1$ και ισχύει $f'(x)=\ln 2\cdot f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $\xi^3\int_0^1 f(t)dt=1-\xi$.

Λύση

i. Θα δείξουμε ότι $g'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{2^x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot 2^x-f(x)\cdot 2^x\cdot\ln2}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ln2}{2^x}\overset{(3)}{=}0 \text{ οπότε}$$

$g(x)=c$ άρα $\dfrac{f(x)}{2^x}=c$.

$\dfrac{f(x)}{2^x}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,2^x$

αλλά $f(0)=1$, άρα $c=1$ οπότε $f(x)=2^x$.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=0$, αφού $0<\dfrac{2}{5}<1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=+\infty$.

iii. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^3\int_0^1 f(t)dt-1+x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(0)=-1<0$ και $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 2^t dt=\dfrac{1}{\ln2}\left[2^t\right]_0^1=\dfrac{1}{\ln2}(2-1)=\dfrac{1}{\ln2}>0$, οπότε

$g(0)g(1) < 0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^3 \int_0^1 f(t)dt = 1 - \xi$.

Είναι $g'(x) = 3x^2 \int_0^1 f(t)dt + 1 > 0$, γιατί $f(t) = 2^t > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε η ρίζα της ξ είναι μοναδική.