# <u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)</u>

## ΕΠΑ.Λ.

## 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους $\nu$, όπου $\kappa, \nu$ μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$.

**α.** Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα $\nu_i$ που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i$, $i = 1, 2, ..., \kappa$.;

(Μον. 3)

**β.** Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα $f_i$ της τιμής $x_i$, $i = 1, 2, ..., κ$;

(Μον. 3)

**γ.** Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$.

(Μον. 4)

**Μονάδες 10**

**Α2.** Έστω $f$ μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A$. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και $s$ η τυπική απόκλιση.

**β.** $(\text{συν}x)' = \text{ημ}x$

**γ.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

**δ.** Η διακύμανση $(s)^2$ είναι μέτρο διασποράς.

**ε.** Αν μία συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta$.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha - 1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Β1.** Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha$.

**Μονάδες 7**

**Β2.** Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση $(s^2)$.

**Μονάδες 7**

**Β3.** Για $\alpha = 4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 5**

**Β4.** Για $\alpha = 4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το –2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό $\kappa$.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του $x$ για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f'$ στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

**Μονάδες 9**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}$$

**Μονάδες 10**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

**ΕΠΑ.Λ.**

**9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** **α.** Απόλυτη συχνότητα $v_i$ που αντιστοιχεί στην τιμή $x_i$, ονομάζεται το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού (ή του δείγματος) για τα οποία η μεταβλητή παίρνει την τιμή $x_i$.

**β.** Σχετική συχνότητα $f_i$ της τιμής $x_i$, i = 1, 2, … κ, ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας $v_i$ της τιμής $x_i$ προς το μέγεθος του δείγματος. Είναι δηλαδή $f_i = \dfrac{v_i}{v}$.

**γ.** $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \dfrac{v_1}{v} + \dfrac{v_2}{v} + ... \dfrac{v_\kappa}{v} = \dfrac{v_1 + v_2 + ... + v_\kappa}{v} = \dfrac{v}{v} = 1$

**Α2.** Μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$, του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

**Α3.** **α.** Σωστό (Σ)
**β.** Λάθος (Λ)
**γ.** Λάθος (Λ)
**δ.** Σωστό (Σ)
**ε.** Λάθος (Λ)

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Επειδή οι όροι του δείγματος είναι 5 και η διάμεσος είναι 15, προκύπτει ότι $4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

**Β2.** Η μέση τιμή είναι

$$\overline{x} = \frac{14 + 12 + 18 + 15 + 16}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

οπότε

$$S^2 = \frac{(15-14)^2 + (15-12)^2 + (15-15)^2 + (15-16)^2 + (15-18)^2}{5} =$$

$$= \frac{1+9+0+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

**B3.** Είναι $\text{CV} = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{2}{15} \simeq 0,13 = 13\%$.

Επειδή 13% > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**B4.** Στο αρχικό δείγμα έχουμε:

$$\overline{x} = 15 \quad \text{και} \quad s_x = 2$$

Στο νέο δείγμα έχουμε:

$\overline{y} = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$ και

$s_y = |-2| 2 = 4$

Οπότε

$\text{CV}_y = \frac{4}{|-25|} = 0,16 = 16\%$.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6\kappa x$

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο $M(1, f(x))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, θα έχουμε:

f ΄(1) =0 οπότε

6 – 6κ =0 ⇔ 6 (1 – κ) =0 ⇔ κ =1.

**Γ2.** Για κ =1 η παράγωγος συνάρτησης της f γράφεται $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

Είναι $f''(x) = 12x - 6$

Λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 \Leftrightarrow x = ½$

και έχουμε:

| $x$ | $-\infty$ | 1/2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | − | 0 | + |
| $f'$ | ↘ | τ.ελαχ. | ↗ |

Άρα για την τιμή $x = ½$ ο ρυθμός μεταβολής της $f$ γίνεται ελάχιστος.

**Γ3.** Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f'$ στο σημείο $A\left(-1, f'(-1)\right)$, δηλαδή το $A\,(-1, 12)$.

- Είναι $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18$
- Επειδή $f''(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = -18$

οπότε $y = -18x + \beta$

- Επειδή η γραφική παράσταση της $f'$ διέρχεται από το σημείο $A\,(-1,\ f'(-1))$ δηλαδή $A\,(-1, 12)$ έχουμε $12 = -18\,(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = -18x - 6$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4} + 2018\right)' =$$

$$= \frac{(x^2+4)'}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R}.$$

**Δ2.** Είναι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

Ο πίνακας μεταβολών της $f$ είναι:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | 2020 | $\nearrow$ | |

Προκύπτει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή 2020 στη θέση $x_0 = 0$.

**Δ3.** Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}^{\,2}-2^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=0.$$