Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0} g(x)dx\,, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x)=\int_{1}^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0,$$

όπου $z=\alpha+\beta i\in C$, με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re(z^2)=-\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\alpha + \beta i$, $\gamma+\delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\, i$$

Μονάδες 9

Β. *Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης Ι** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης ΙΙ** (δύο αριθμοί στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν).*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. i^1	**1.** $-i$
Β. i^2	**2.** $+1$
Γ. i^3	**3.** i
Δ. i^4	**4.** -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ,** ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ, Δ, Ε και ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0,\ f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(–1, f(–1)).

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (–1, 2).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \; .$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $\mathrm{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ. Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε

$\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z|=1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)\,dt\ .$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 10

*Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις **Β, Γ, Δ, Ε** και **ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Β. Αν $M_1(\alpha\ ,\ \beta)$ και $M_2(\gamma\ ,\ \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 3

Γ. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$\overline{z} = -\alpha + \beta i$.

Μονάδες 3

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- f΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 3

ΣΤ. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$,

Μονάδες 10

ii) $f΄(0)=2f(0)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}-\{2\}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(1,−4) και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 0.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α $(1,-4)$.

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$x = 3-k \quad \text{και} \quad y = 2k+1 .$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3\,\mathrm{Re}(z) + 4\,\mathrm{Im}(z) = 3$, τότε $k = -2$.

Μονάδες 9

β) αν $|z-1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

Μονάδες 10

γ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>δεν θα τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Β. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και $x_0 \in A$.
Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ, Δ, Ε, ΣΤ** και **Ζ** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

Γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 2

Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int ημx dx = συνx + c$

Μονάδες 2

ΣΤ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 2

Ζ. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C΄ οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ x \le 0 \\ αx+β & , \ 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & , \ x \ge 1 \end{cases} \qquad \text{όπου } α, β \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 8

β) Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, ισχύει: α=1 και β=0, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$

Μονάδες 9

ii) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad , \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w=\dfrac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{(z_1\cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2} \quad .$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ = (0, +∞) για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt \quad , \ x\in\Delta.$$

α) Να υπολογίσετε το f(1).

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιό σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ