

ΘΕΜΑ 162

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  τέτοια ώστε  $f'(x) \leq 1$ , για κάθε  $x \in [0,1]$  και  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Να δείξετε ότι:

α.  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0$

β.  $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2}$

γ.  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4}$

(Μαθηματικός διαγωνισμός, Ρουμανία 1997)

α)  $\int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{dt}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 0.$

Θέτουμε  $x = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 2x$  : Για  $x=0 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$   
Για  $x=1/2 \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$f$  συνεχής  $[0,1]$   
ως παραγωγίσιμη

β)  $0 \leq x \leq 1$ .  
 $f$  συνεχής  $\left[\frac{x}{2}, x\right]$   
 $f$  παραγωγίσιμη  $\left(\frac{x}{2}, x\right)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ΘΜΤ} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x - \frac{x}{2}} = \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \quad (1) \\ \text{ή } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \end{array} \right.$

$\frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x - \frac{x}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow f'(\xi) \leq 1$

ισχύει από για κάθε  $x \in [0,1]$  έχουμε  $f'(x) \leq 1$ .

γ) Από για κάθε  $x \in [0,1]$  ισχύει

$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) dx \leq \int_0^1 \frac{x}{2} dx$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \leq \frac{1}{4} \stackrel{a)}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4}.$

ΘΕΜΑ 183

Έστω  $f(x) = e^{x-1}$  και  $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να δείξετε ότι:  $g(x) = 1 + \ln(x^2 + 1)$ .

β. Να δείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon) : y = x$  εφάπτεται της  $C_f$  και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_g$  που είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ .

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση:  $(f \circ g)(x) = g(x)$  έχει μία ακριβώς λύση στο  $\mathbb{R}$ .

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $I = \int_0^1 \frac{x(g(x)-1)}{(f \circ g)(x)} dx$

α)  $f(g(x)) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R} \quad (1)$

$$f(x) = e^{x-1} \xrightarrow{x=g(x)} f(g(x)) = e^{g(x)-1} \xrightarrow{(1)} x^2 + 1 = e^{g(x)-1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = g(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) = \ln(x^2 + 1) + 1.$$

β) Απαιτούμε:  $f(x) = y \Leftrightarrow e^{x-1} = x \Leftrightarrow e^{x-1} - x = 0$ . Προφανής λύση  $x = 1$

Θεωρούμε  $h(x) = e^{x-1} - x \Rightarrow h'(x) = e^{x-1} - 1$

Λόγω ακροτύτων  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (μοναδική).

•  $f'(1) = e^{1-1} = 1 = \lambda \varepsilon$ . Άρα  $y = x$  εφαπτάται της  $C_f$  σε  $x_0 = 1$ .

$$g'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x_0}{x_0^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$g(1) = 1 + \ln 2$$

Άρα  $y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2$ .

$$(δ). \quad f(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 + \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - x^2 = 0.$$

Η ισότητα ισχύει για  $x=0$ .

Θεωρούμε  $k(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2$

$$k'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x = \frac{-2x^3}{x^2 + 1}$$

	0	
$k'(x)$	+	-
$k(x)$	↗	↘
	$k(0) = 0$	

Άρα  $k(x) \leq k(0)$

η ισότητα ισχύει

μόνο για  $x=0$ .

$$(ε) \quad I = \int_0^1 \frac{x \cdot (g(x) - g)}{(f \circ g)(x)} dx = \int_0^1 \frac{x \cdot (\ln(x^2 + 1) - 1)}{x^2 + 1} dx$$

Θεωρούμε

$$\ln(x^2 + 1) = u.$$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{du}{2}.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (u)' \ln u \, du$$

$$= \frac{1}{2} [u \ln u - u]_0^{\ln 2} = \dots$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} \ln(x^2 + 1) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(x^2 + 1))' \, dx.$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x^2}$

B.1 Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

B.2 Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.

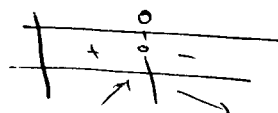
B.3 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 x \cdot f(x) dx$ .

B.4 Για  $x \in [0, 1]$ , να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της.

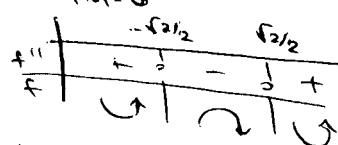
B.5 Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{1/e} \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{e}$

B.6 Να δείξετε ότι  $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1$  και  $\frac{2}{3} = \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$ .

B.1  $f$  συνεχής  $\mathbb{R}$   $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$



B.2  $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$



B.3  $\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (e^{-x^2})' dx$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e-1}{e} \right)$$

B.4 Για  $x \in [0, 1]$

$f'(x) \leq 0$  (η ισότητα ισχύει για  $x=0$  μόνο)  $\rightarrow f$  γν. φθίνουσα στο  $[0, 1]$   
 $\Rightarrow$  "1-1" οπότε αντιστρέφεται.

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = \left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$$

Θετουμε  $y = e^{-x^2} \quad y > 0 \Leftrightarrow -x^2 = \ln y \Leftrightarrow x^2 = -\ln y \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln y} \quad x \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\ln y^{-1}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln \frac{1}{y}} \quad \text{hence} \quad A_{f^{-1}} = \left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{x}}$$

B.5 
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\sqrt{e}} f'(x) dx. \quad (1)$$

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} f'(x) dx = \int_0^1 u \cdot f'(u) du = \left[ u \cdot f(u) \right]_0^1 - \int_0^1 f(u) du.$$

Θέτουμε  $u = f'(x) \Leftrightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u) du.$

Για  $x=1$  έχουμε  $f(u)=1 \Leftrightarrow f(u)=f(0) \Leftrightarrow u=0$

Για  $x=\sqrt{e}$  έχουμε  $u = f'(\frac{1}{e}) = \sqrt{\ln e} = 1.$

$$= f(1) - \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Οπότε  $(1) \Leftrightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx + f(1) - \int_0^1 e^{-x^2} dx = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

B.6 Έχουμε  $\ln x \leq x-1$   
 $\Leftrightarrow \left[ e^{x^2} \geq 1-x^2 \right]$

Αφού  $f$  φθινούσα έχουμε  $0 \leq x \leq 1$   
 $\Rightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(1)$   
 $\left[ 1 \geq e^{-x^2} \geq e^{-1} \right]$

Για  $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1, \quad x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 1-x^2 dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$$

Δίνονται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x^2)$  και η συνάρτηση  $g(x) = 2 \ln x$

- i) Να εξετάσετε σε ποιο ευρύτερο δυνατώ υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) = g(x)$
- ii) Να βρείτε τα σημεία της  $C_f$  στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από το  $(0,0)$  και να γράψετε τις εφαπτομένες
- iii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονotonία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της στο πεδίο ορισμού της  $f$ .
- iv) Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την  $C_f$ .
- v) Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ της  $C_f$  και  $y = \frac{2}{e}x$  και  $y' / 4$ .

ΛΥΣΗ

$$i) f(x) = \ln x^2 = \ln |x|^2 \quad g(x) = 2 \ln x$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad x \in (0, +\infty)$$

Άρα για  $x > 0$  ισχύει  $f(x) = \ln x^2 = 2 \ln x = g(x)$ .

Τελικά  $f(x) = g(x)$  για  $\underline{x > 0}$ .

(iii). Έστω  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - \ln |x_0|^2 = \frac{2}{x_0}(x - x_0) \quad , \quad f'(x) = (2 \ln |x|)' = \frac{2}{|x|} = \frac{2}{x}$$

$$\text{όπου } \Leftrightarrow 0 - \ln |x_0|^2 = \frac{2}{x_0}(0 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln |x_0| = -2 \Leftrightarrow \ln |x_0| = 1 \Leftrightarrow \ln |x_0| = \ln e$$

$$\Leftrightarrow |x_0| = e \Leftrightarrow x_0 = e \quad \vee \quad x_0 = -e$$

$$\text{Εφ}_1: y - 2 = \frac{2}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x \quad \vee \quad \text{Εφ}_2: y = -\frac{2}{e}x$$

iii)  $f(x) = \ln x^2$  συνεχής στο  $\mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'$	-		+
$f$	$\nearrow$		$\nearrow$

Η  $f$  δεν παρουσιάζει ακρότατα

$$A_1: (-\infty, 0) \xrightarrow[\text{f}]{\text{f συνεχής}} f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 \xrightarrow[u = \ln x^2]{x^2 = u} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 \xrightarrow[u = \ln x^2]{x^2 = u} \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

Ομοίως  $f(A_2) = (-\infty, +\infty)$ .

$$\text{Άρα } f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}.$$

iv) Πιθανή κατασκευή άκρων:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = -\infty$   $\Rightarrow |x| = 0$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 = +\infty$

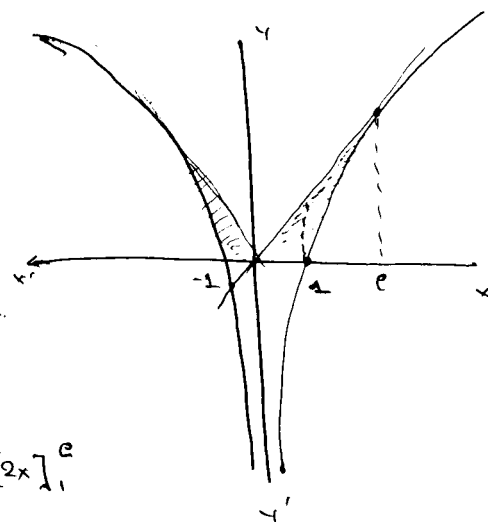
$$\text{Πράγματι } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \dots = 0$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots \pm +\infty$$

Άρα δεν έχει πλάγιο  
ασύμπτωτο στο  $+\infty$

Ομοίως στο  $-\infty$

$$f(x) = \ln |x|^2 = 2 \ln |x| = \begin{cases} 2 \ln x, & x > 0 \\ +2 \ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{v) } E(\infty) &= \int_0^e |f(x) - y| dx = \int_0^1 y dx + \int_1^e y - f(x) dx \\ &= \frac{1}{e} + e - \frac{1}{e} - 2 = e - 2. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{e} x dx = \left[ \frac{2x^2}{2e} \right]_0^1 = \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2}{e} x - \ln x^2 dx &= \int_1^e \frac{2}{e} x dx - \int_1^e (x)' \ln x^2 dx \\ &= \left[ \frac{2x^2}{2e} \right]_1^e - \left[ x \ln x^2 \right]_1^e + \int_1^e x \cdot \frac{2x}{x^2} dx \\ &= e - \frac{1}{e} - 2e + \frac{2}{e} - 2 = e - \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

\* (vi) Να αποδείξετε ότι η γρ. παράσταση  $y = f$  και η ευθεία  $y = \frac{2}{e}x$  έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

Έχουμε 
$$f(x) = \begin{cases} 2 \ln x, & x > 0 \\ 2 \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad y = \frac{2}{e}x.$$

Για  $x > 0$  ισχύει ότι  $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0 \Rightarrow f$  κοίλη  $(0, +\infty)$ .

Άρα  $f(x) \leq \frac{2}{e}x$  η ισότητα ισχύει μόνο στο σημείο επαφής  $x_0 = e$

Για  $x < 0$  :  $f(x) > \frac{2}{e}x \Leftrightarrow 2 \ln(-x) > \frac{2}{e}x$

$\Leftrightarrow e \ln(-x) = x$

$\Leftrightarrow e \ln(-x) - x = 0.$

Θεωρούμε  $h(x) = e \ln(-x) - x.$

η συνεχής  $[-1, a]$

•  $h(-1) = e \ln 1 + 1 = 1.$

• Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$ , οπότε υπάρχει α κοινά στο  $0^-$  έτσι ώστε  $h(a) < 0$ .

Δλδ  $h(a) < 0$

Άρα  $h(a) \cdot h(-1) < 0 \xRightarrow{\text{ΘΒ}} \exists x_0 \text{ π.ω. } h(x_0) = 0.$

Δλδ. η  $h$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα

Άρα τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Ότως  $h'(x) = \frac{e}{x} - 1 < 0$  (αφού  $x < 0$ ).

Άρα η γρ. φθίνουσα.

Άρα ακριβώς ένα κοινό σημείο



Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$ ,  $x > -1$  και  $\lambda > 0$ .

i) Ν.Σ.Ο. η  $f$  έχει ελάχιστο.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει την τιμήση αυτή.

ΛΥΣΗ

i)  $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{(x+1)}$  συνεχής στο  $(-1, +\infty)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\lambda e^{\lambda x}(x+1) - e^{\lambda x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{\lambda x}[\lambda x + \lambda - 1]}{(x+1)^2}$$

αφού  $e^{\lambda x} > 0$  και  $(x+1)^2 > 0$  έχουμε

$$\lambda x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$f'$		-	+
$f$		$\searrow$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \lambda \cdot e^{1-\lambda}$$

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(\lambda) = \lambda \cdot e^{1-\lambda} \quad \text{for } \lambda > 0 \text{ και συνεχής.}$$

$$\Rightarrow g'(\lambda) = e^{1-\lambda} - \lambda e^{1-\lambda} = e^{1-\lambda}(1-\lambda)$$

	0	1	$+\infty$
$g'$		+	-
$g$		$\nearrow$	$\searrow$

$g(1) = 1$

Άρα για  $\lambda = 1$  το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει την τιμήση αυτή.

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύει  $f(x)(1-x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$

i) ν.δ.ο.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & x = 1 \end{cases}$

και ότι  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x > 0$

ii) ν.δ.ο.  $f'(1) = -\frac{1}{2}$

iii) ν.δ.ο. η  $f$  δεν έχει κρίσιμα σημεία

iv). Έστω  $\square$  το χωρίο που περιγράφεται από την  $C_f$ , τον  $x$ -αξονα και τις ευθείες  $x=2, x=3$ . Να αποδείξετε ότι  $\ln 4 < E(\square) < \ln 3\sqrt{3}$

v) Να λυθεί η εξίσωση  $2f(x^2) = f(x^3) + f(x^4)$ .

Λύση

Για  $x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$

Αφού  $f$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$  τότε  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{1-x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{-1} = -1$ .

Τελικά  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ -1, & x = 1 \end{cases}$

Για  $x \in (0,1)$  έχουμε  $\ln x < 0$   
και  $\frac{x}{1-x} > 0$  Άρα  $\frac{x}{1-x} \ln x < 0$ .

Για  $x > 1$  έχουμε  $x \cdot \ln x > 0$   
και  $1-x < 0$  Άρα  $\frac{x}{1-x} \cdot \ln x < 0$ .

Δεν παλινω κατά τέλη  
Αποδεικνύεται ότι είναι εσπευσμένη

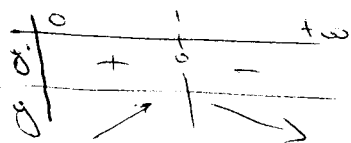
$$\begin{aligned} \text{ii). } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x \ln x}{1-x} + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{-(x-1)^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - x}{-2(x-1)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

iii). Πιθανά κρίσιμα σημεία  $f'(x) = 0$   
Δεν υπάρχει η  $f'$  σε κάποιο σημείο

Αφού  $f'$  παραγωγίζεται σε  $(0, +\infty)$  τότε μοναδικά  
πιθανά κρίσιμα σημεία είναι εκεί που ταυτίζεται η παράγωγος.

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)/(1-x) + x \ln x}{(1-x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2}$$

Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση  $g(x) = \ln x - x + 1 \stackrel{x > 0}{=} g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$



$x=1$  ολ. κρίσιμα  $g(1)=0$   
ΑΛΣ.  $g(x) \leq 0$ .

Άρα  $f'(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$  και  $(1, +\infty)$ .

Άρα δεν έχει κρίσιμα σημεία.

iv). Το εμβαδόν ορίζεται  $E(z) = \int_2^3 |f(x)| dx$  ( $=$ )

και  $f(x) < 0$  απ'ω.ι) ορα.  $E(z) = - \int_2^3 f(x) dx.$

Η  $f$  γν. φθίνουσα για  $x > 1$ .

Άρα  $2 < x < 3 \xrightarrow{f \downarrow} f(2) > f(x) > f(3)$

$$\Rightarrow -f(2) < -f(x) < -f(3)$$

$$\Rightarrow \ln 4 < -f(x) < \frac{2}{3} \ln 3$$

$$\Rightarrow \ln 4 < E(z) < \ln 3^{3/2} \Rightarrow \ln 4 < E(z) < \ln \sqrt{3^3} \dots \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ln 4 < E(z) < \ln 3\sqrt{3}$$

v). Πραφονίς πρία  $x=0$ . και  $x=1$ .

$$\text{Για } x > 1 \Rightarrow x^2 < x^3 \xrightarrow{f \downarrow} f(x^2) > f(x^3) \quad \textcircled{+} \quad 2f(x^2) > f(x^2) + f(x^3)$$

$$x^2 < x^4 \Rightarrow f(x^2) > f(x^4)$$

$$\text{Για } 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 > x^3 \Rightarrow f(x^2) < f(x^3) \quad \textcircled{+} \quad 2f(x^2) < f(x^2) + f(x^3)$$

$$x^2 > x^4 \Rightarrow f(x^2) < f(x^4)$$

Έστω μια παραφορτισμένη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t) = \frac{f(x)}{2(x+1)}, x \neq -1$  και  $f(-1) = \frac{2}{e}$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$

β) Ν.Σ.Ο. η  $f$  γν. αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  ή αντιστοίχως  $(0, \infty)$

γ). Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα οπτικά τακτάρ.

δ) Ν.Σ.Ο.  $f(x) \cdot (x+1) = f(x^2) + 2ex$ , για κάθε  $x \geq 1$ .

ε) Ν.Σ.Ο.  $\int_1^2 \frac{(x^4+1)e^{x^2}}{e^{(x+1)}} dx > 3e - 4 - 2 \ln \frac{2}{3}$ .

$$\begin{aligned} l &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t \right) \quad \text{ο...} \quad \sqrt{e^{2t}} = |e^t| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^t \\ &\quad \text{Αρα} \\ &\quad e^t - e^t = 0, \\ &\quad \text{Αρα αόριστο} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1 - e^{2t}}{\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} + e^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t \left[ (x+1)e^x + \frac{1}{e^t} \right]}{e^t \left( \sqrt{1 + (x+1)\frac{e^x}{e^t} + \frac{1}{e^{2t}}} + 1 \right)} \\ &= \frac{(x+1) \cdot e^x}{2} \end{aligned}$$

Αφού  $t \rightarrow +\infty$   
τότε  $|e^t| = e^t$ .

Άρα για κάθε  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$  είναι:

$$\frac{f'(x)}{2(x+1)} = \frac{(x+1)e^x}{2} \Rightarrow f'(x) = (x+1)^2 e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 1)e^x + 2x \cdot e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = [(x^2 + 1) \cdot e^x]' \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)e^x + c_1, & x < -1 \\ \frac{2}{e}, & x = -1 \\ (x^2 + 1)e^x + c_2, & x > -1 \end{cases}$$

Αφού  $f$  συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \frac{2}{e} + c_1 = \frac{2}{e} + c_2 \mp \frac{2}{e}$$

$$\text{Άρα } \frac{2}{e} + c_1 = \frac{2}{e} \Leftrightarrow c_1 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{2}{e} + c_2 \mp \frac{2}{e} \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Τελικά  $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + ax}{x-1}, & x < 1 \\ Bx + \frac{e}{2} \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$

α) Να βρεθούν οι  $a, B \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

β) Αν  $a = -e$ ,  $B = 0$  να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .

Λύση

• Αφού παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( Bx + \frac{e}{2} \ln x \right) = B.$$

$$f(1) = \dots = B.$$

Για  $x \neq 1$  έχουμε  $f(x) = \frac{e^x + ax}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \cdot f(x) = e^x + ax$ . οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x + ax) \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} 0 \cdot f(1) = e + a \Leftrightarrow \boxed{a = -e} \quad (1)$$

Απαιτείται  $B = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x + ax}{x-1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x - e}{x-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x - e = 0$  Άρα  $\boxed{B = 0}$ .

Για να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x - e}{(x-1)^2} \stackrel{0/0}{\underset{L'H}{\dots}} = \frac{e}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{e}{2} \ln x}{x - 1} \stackrel{0/0}{\underset{L'H}{\dots}} = \frac{e}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e}{2} \end{array} \right\} f'(1) = \frac{e}{2}$$

Τελικά

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - 2e^x + e}{(x-1)^2}, & x < 1, \\ \frac{e}{2}, & x = 1, \\ \frac{e}{2x}, & x > 1. \end{cases}$$

B) Για  $x > 1$  :  $f'(x) > 0$  Άρα η  $f$  αυξάνει στο  $(1, +\infty)$   
 άρα  $f$  συνεχίζεται.

Για  $x < 1$  :  $f'(x) = \frac{e^x x - 2e^x + e}{(x-1)^2}$  , όπου  $(x-1)^2 > 0$ .

Θα δείξουμε  $E(x) = e^x x - 2e^x + e \Rightarrow E'(x) = e^x x + e^x - 2e^x = e^x x - e^x = e^x(x-1) \leq 0$ ,  
 για  $x \leq 1$

Άρα  $E(x)$  γι' αυξανόμενα  $x$   
 άρα για  $x < 1$   
 $\Rightarrow E(x) > E(1) = 0$ .

Τελικά  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x < 1$ .

Άρα  $f$  η  $f$  αυξάνει στο  $(-\infty, 1)$

άρα  $f$  συνεχίζεται.

Άρα  $f$  συνεχίζεται στο  $x=1$   $f$  η  $f$  αυξάνει στο  $\mathbb{R}$ .

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-e, +\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e}{x - 1} \stackrel{0/0}{\underset{L'H}{\dots}} = -e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} \ln x = \frac{e}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$$



Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \ln x + \frac{B}{x}$

α) Να βρείτε τις τιμές των  $a, B$  για τις οποίες το  $M(1,1)$  είναι σ. καμπής της  $C_f$ . Αν  $a=2$  και  $B=1$  τότε

β). Ν.Σ.Ο.  $f(x) + 2 \ln 2 > 2$ , για κάθε  $x > 0$

γ). Να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο καμπής της.

δ). Ν.Σ.Ο.  $f(x) < x$ ,  $\forall x > 1$ .

Λύση.

Αφ:  $(0, +\infty)$ . Έχουμε σ.κ στο  $x_0=1 \Rightarrow f''(1)=0$   
και  
 $f'(1)=1$ .

$$f(1)=1 \Leftrightarrow \boxed{B=1}$$

και

$$f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{B}{x^2} \xrightarrow{B=1} f''(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x^3} \quad \text{Οότε } f''(1)=0 \Leftrightarrow -a+2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=2}$$

Για  $a=2$  και  $B=1$

$$\boxed{f(x) = 2 \ln x + \frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2}$$

	0	1/2	+
f'	+	-	+
	+	↘	↗

Αρα στο  $x_0 = \frac{1}{2}$  έχουμε σλ. ελάχιστο  $\hookrightarrow f(x) \geq f(\frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 2 \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow f(x) \geq -2 \ln 2 + 2 \Leftrightarrow f(x) + 2 \ln 2 \geq 2$$

(Εναλλακτικά όλα τα παραπάνω  
+ θεωρία νέα συνάρτηση)

δ) Στο  $x_0=1$   $f(1)=1$  και  $f'(1)=1$  οπότε  $y-1=L(x-1) \Leftrightarrow y=x$

ε) Για  $x \geq 1$  η  $f$  κοίτη. Αρα  $f(x) \leq x$  η ισότητα ισχύει στο σ.επιπέδου.

Αρα  $f(x) < x$ ,  $x \in (1, +\infty)$

Η Θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος στα δύο πρώτες ώρες μιας περιβαλλοντικής μελέτης δίνεται από τη συνάρτηση

$$N(t) = -t^4 - 2t^2 + 12t + 1 \quad (t \text{ σε ώρες})$$

- α) Να βρεθεί η Θερμοκρασία του σώματος στο τέλος της 1<sup>ης</sup> ώρας  
 β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της Θερμοκρασίας φέροντας υπόψη ότι ανήκει στην 1<sup>η</sup> ώρα και την 2<sup>η</sup> ώρα.

ΛΥΣΗ

α) Για  $t=1$  :  $N(1) = -1^4 - 2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 1 = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

β)  $N'(t) = -4t^3 - 4t + 12$ .

Άρα, στο  $t=1$  έχει ταχύτητα για  $t \in [0, 2]$  ως (1, 2).

$N'(t)$  συνεχώς ως πολυωνομική.

$N'(1) = 4$

$N'(2) = -28$

Ο.Β.  $\Rightarrow$  η εξίσωση  $N'(t) = 0$  έχει ταχύτητα για  $t \in [0, 2]$

Η ανάβαση στην κορυφή του Όχλινου (Μόικας, 2917m) γίνεται συνήθως απ' την θέση "Πρίονια" και διαρκεί για την επιστροφή 6 ώρες. Η κατάβαση επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινά απ' την θέση Πρίονια στις 6 π.μ. και χάρη σε σταθερή βροχίδα σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 π.μ. για την κατάβαση απ' τον Μόικα και σε 6 ώρες ολοκληρώνοντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα Πρίονια. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τολάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

ΛΥΣΗ

Έστω  $f(t)$  και  $g(t)$  οι συναρτήσεις που εκφράζουν την θέση του ορειβάτη στην ανάβαση και την κατάβαση αντίστοιχα, στο  $[6, 12]$

Ψάχνουμε αν  $f(t) = g(t) \Leftrightarrow f(t) - g(t) = 0$  στο  $[6, 12]$

Έστω

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$h(6) = f(6) - g(6) = -g(6)$$

$$h(12) = f(12) - g(12) = f(12)$$

$$\left. \begin{array}{l} h(6) = f(6) - g(6) = -g(6) \\ h(12) = f(12) - g(12) = f(12) \end{array} \right\} \rightarrow h(6)h(12) = -5^2 < 0$$

$$\stackrel{\text{Θ.Β.}}{\implies} \exists t_0 \in (6, 12)$$

σ.μ.

$$h(t_0) = 0$$

$$f(t_0) = g(t_0)$$

αφού  $f(6) = 0$  (πριν ξεκινήσει δεν έχει ανεβεί)

$$g(6) = 5$$

$$f(12) = 5$$

$$g(12) = 0$$

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε  $f(x)=e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $g(x)=\ln x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

Θεωρούμε την συνάρτηση  $H(x)=f(x)-g(x)$ ,  $x > 0$ .

B.1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$  τ.ω.  $H'(x_0)=0$ .

B.2. Ν.Σ.Ο. Στο σημείο  $x_0$  του B.1. η κατακόρυφη απόσταση (AB) όπου  $A(x, e^x)$  και  $B(x, \ln x)$  παίρνει τη μικρότερη τιμή, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$H(x_0) = x_0 + \frac{1}{x_0}$$

B.3. Ν.Σ.Ο.  $H(x) > 2$ , για κάθε  $x > 0$  και  $\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2} dx > 1$

B.4. Ν.Σ.Ο.  $(x \cdot H(x))' > 1$ , για κάθε  $x > 0$ , και να λύσετε την ανίσωση  $e^x - \ln x \leq \frac{e}{x}$

Λύση

B.1.  $H(x)=f(x)-g(x)=e^x-\ln x$  συνεχής  $(0, +\infty)$

$$\rightarrow H'(x)=e^x - \frac{1}{x} \text{ συνεχής } [\frac{1}{2}, 1]$$

$$H'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$H'(1) = e - 1 > 0$$

$H'(\frac{1}{2}) \cdot H'(1) < 0 \rightarrow \text{ΘΒ} \rightarrow x_0 \in (\frac{1}{2}, 1) \text{ με } H'(x_0)=0$   
επληκτισαν ένα  $x_0$

$$\bullet H'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ συνεχής } H' \Rightarrow H' \text{ γν. αύξουσα}$$

Άρα  $x_0$  μοναδικό.

B.2.  $(AB) = |e^x - \ln x| = e^x - \ln x$  αφού  $e^x > \ln x$ .

$$\Delta\lambda\varsigma. (AB) = H(x) = e^x - \ln x, x \in (0, +\infty)$$

$$\bullet \text{ Για } x > x_0 \xrightarrow{H' \uparrow} H'(x) > H'(x_0) = 0 \text{ και } 0 < x < x_0 \xrightarrow{H' \uparrow} H'(x) < H'(x_0) = 0$$

Τελικά

	0	$x_0$	$+\infty$
$H''$	+	+	+
$H'$	-	0	+
$H$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα σε  $x_0$  η  $H$  παρουσιάζει σφ. ελάχιστο

$$\text{με } H(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \cancel{x_0} + \frac{1}{x_0}$$

$$H'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0$$

B.3  $\begin{cases} e^x > x+1, & x > 0 \\ \ln x \leq x-1, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x > x+1, & x > 0 \\ -\ln x > x+1, & x > 0 \end{cases} \xrightarrow{④} e^x - \ln x > 2$   
 $\Leftrightarrow H(x) > 2$

Από  $e^x - \ln x > 2 \xrightarrow{x^2 > 0} \frac{e^x - \ln x}{x^2} > \frac{2}{x^2} \rightarrow \int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2} dx > \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = 1$

B.4  $(x + H(x))' > 1 \Leftrightarrow H(x) + xH'(x) > 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x + x(e^x - \frac{1}{x}) > 1$

$\Leftrightarrow (e^x - \ln x) + xe^x > 2 \Leftrightarrow H(x) + xe^x > 2$  που ισχύει.

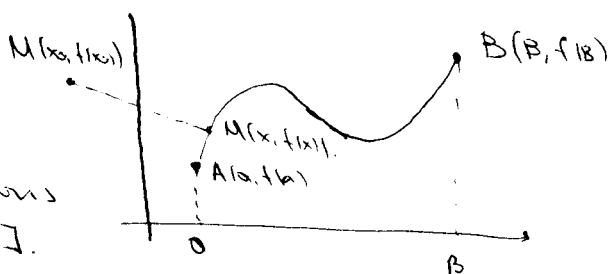
$e^x - \ln x \leq \frac{e}{x} \Leftrightarrow x(e^x - \ln x) \leq e \Leftrightarrow x + H(x) \leq e$  (1).

Εστω  $\phi(x) = x + H(x)$

$\phi'(x) = H(x) + xH'(x) > 1 > 0$  Άρα  $\phi(x)$   $\nearrow$  στο  $(0, +\infty)$ .

Οπότε  $\phi(x) \leq e \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(1) \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ .

Δίνεται το διπλανό σχήμα.  
 Στο οποίο σημειώνεται η συνεχής  
 συνάρτηση  $f$ .



i) Να φέρите τον τύπο της απόστασης  
 $d(x) = (u, v)$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

ii) Νό.ο η  $d$  συνεχής στο  $[a, b]$  και συν. συνέχεια ότι υπάρχει ένα ταξινόμηση  
 σημείο της  $C_f$  που απέχει από το  $M_0$  την μικρότερη απόσταση και για  
 την δεδομένη απόσταση από τα υπόλοιπα σημεία της.

i).  $d(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-f_0)^2}, x \in [a, b]$

ii)  $d$  συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο  $[a, b]$

Άρα από  $d$  συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  παίρνει  
 μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή. Άρα υπάρχουν  
 $x_1, x_2 \in [a, b]$  π.ω  $d(x_1) \leq d(x) \leq d(x_2)$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

