ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ημ}\,x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right) = f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x),\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=$ συνx έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$

ii) $$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$$

iii) $$\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)dt$$

τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\text{συν}x=0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{ημ}\,x}{x}=1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w, με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|=1 \quad \text{και} \quad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{2}{x}, \quad x \neq 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(2, f(2)\right)$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-3}{x^2-1}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+x f'(x)=ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)+συνx$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1-συνx}{x},\ x\in\mathbb{R} \text{ και } x\neq 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1-συνx = xημx$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi ημ\xi+συν\xi=1+\frac{2}{\pi^2}\xi^2$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$z-\bar{z}=2\beta$$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w}+3i)=i(3\overline{w}+i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w.

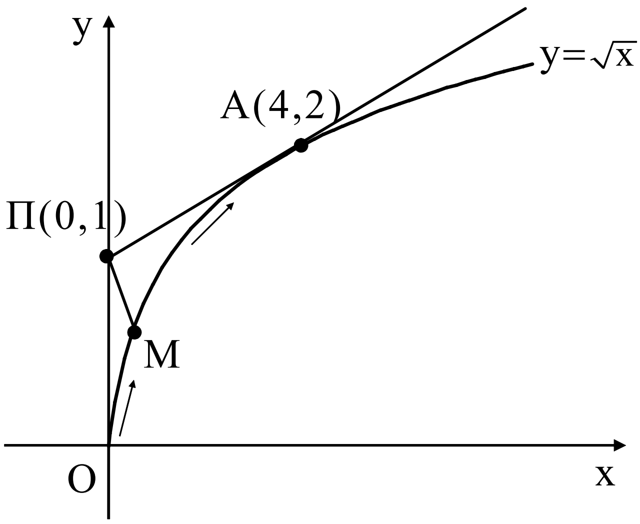
Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16\text{m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω Μ (x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z=x+yi στο μιγαδικό επίπεδο. Να διατυπώσετε τον ορισμό του μέτρου του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$z - \bar{z} = 2\beta$$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w}+3i)=i(3\overline{w}+i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.

Μονάδες 5

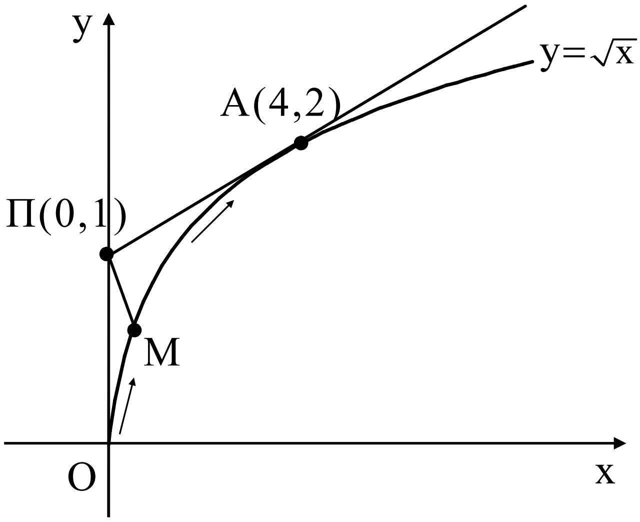
Β4. Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $u=-i$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ είναι $x'(t)=16\text{m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης, μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y(t) του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t>0$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4m/min.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(-2, \frac{5}{12})$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=4.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \qquad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $z\in\mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^{\nu})}=\left(\overline{z}\right)^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

β. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η ho(gof), τότε ορίζεται και η (hog)of και ισχύει ho(gof) = (hog)of

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x - 1}{x}=1$

δ. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ $\in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ε. Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^{x} = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει w=2

Μονάδες 6

Β2. Αν $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

Μονάδες 6

Β3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 , z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Μονάδες 8

Β4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

$$xf'(x) < f(x) + \ln 2 \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_0^x f(t)\,dt = \left(\ln(x+1)\right)^2 \text{ , } x > -1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x > -1$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \le e^{x+1} \text{ , για κάθε } x > -1$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x = e-1$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1)\ ,\quad x > -1$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+1)^2 = 2^{x+1}\ ,\quad x > -1$$

έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις x=1 και x=3

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ