

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$cf(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{με} \quad g(x) \neq 0,$$

όπου c πραγματική σταθερά.

Μονάδες 4,5

B. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A Συνάρτηση	Στήλη B πρώτη παράγωγος
α. x^2+3	1. $1-\eta\mu x$
β. $x+\sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2-8x$
γ. $x\eta\mu x$	3. $2x+3$
δ. x^3-4x^2	4. $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2-4x$
	7. $\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{είναι:}$$

$$A: e^x, \quad B: \frac{e^x - xe^x}{x^2}, \quad \Gamma: \frac{e^x x + e^x}{x^2},$$

$$\Delta: \frac{e^x x - e^x}{x^2}, \quad E: \frac{xe^x - e^x}{x}$$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Σχετική Συχνό- τητα	Αθροιστική Συχνότητα			
x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100				

Μονάδες 16

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2=0,49$.

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0- 5	10
5-10	15
10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

A. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

Μονάδες 5

B. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

ΘΕΜΑ 1°

A. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$.

α) Τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i , όπου $i=1, 2, 3, \dots, k$;

Μονάδες 4

β) Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i όπου $i=1, 2, 3, \dots, k$;

Μονάδες 4

γ) Αν f_1, f_2, \dots, f_k είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών x_1, x_2, \dots, x_k αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1.$$

Μονάδες 4,5

- Β.** Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i
0	7
1	15
2	20
3	5
4	3
Σύνολο:	50

Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- 1)** Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής $x_3 = 2$ είναι

A. 15

B. 0,4

Γ. 0,14

Δ. 20

E. 42

Μονάδες 6

- 2)** Η σχετική συχνότητα της τιμής $x_4 = 3$ είναι

A. 0,94

B. 0,1

Γ. 5

Δ. 4

E. 47

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x-3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

γ) Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 3$$

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f .

Μονάδες 12

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε διαδρομές για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο Α ήταν

9, 6, 7, 9, 9, 8

ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο B ήταν

8, 10, 7, 8, 12.

- α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο A.

Μονάδες 10

- β)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο B.

Μονάδες 10

- γ)** Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο A και όχι το B, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο B και όχι το A, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.1** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 6,5

- A.2** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α. $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$ όταν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

β. $P(A') = \dots\dots\dots$, όπου A' είναι το συμπληρωματικό του A .

Μονάδες 6

- B.** Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με:

$$P(\omega_2) = \frac{1}{4}, \quad P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24} \quad \text{και} \quad P(\omega_5) = \frac{1}{2}$$

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι:

$$A : \frac{1}{2} \quad B : \frac{1}{6} \quad \Gamma : \frac{1}{3} \quad \Delta : \frac{1}{12} \quad E : \frac{1}{8}$$

Μονάδες 6,5

β. Δίνονται τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και

$B = \{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω .

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A \cup B)$	1. $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	2. $\frac{7}{24}$
γ. $P(A')$	3. $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες.

Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην Α' κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ' κατηγορίας είναι 18° . Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β' κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ' κατηγορίας.

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.

Μονάδες 20

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη Α:	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Πόλη Β:	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

α. Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.

Μονάδες 9

- β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $s_A = 2,66$ και $s_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

Μονάδες 6

- γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς.

Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
 ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Στη στήλη **I** του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα πρώτα μέλη των ισοτήτων οι οποίες εκφράζουν τους κανόνες παραγώγισης. Στη στήλη **II** υπάρχουν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων αυτών.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $(c \cdot f(x))'$	1. $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
B. $(f(x) + g(x))'$	2. $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Γ. $(f(x) \cdot g(x))'$	3. $\frac{f'(x)}{g'(x)}$
Δ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ με $g(x) \neq 0$	4. $f'(x) + g'(x)$
E. $[f(g(x))]'$	5. $f(x) \cdot f'(x)$
	6. $c \cdot f'(x)$
	7. $f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης του πίνακα και, ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της δεύτερης στήλης έτσι ώστε να προκύψουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης.

Μονάδες 12,5

B. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = x + 1$

2. $f_2(x) = x e^x$

3. $f_3(x) = 2 + \ln x$, $x > 0$

4. $f_4(x) = \frac{x}{x+2}$, $x \neq -2$

5. $f_5(x) = 2 \eta\mu x + 3 \sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2004$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 3)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε μια από τις πέντε στήλες.

x_i	v_i	f_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	2	0,1			
2			8		
3	8				
4					
ΣΥΝΟΛΟ		1		100	

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα Α και οι 7 στο τμήμα Β. Οι μισθοί (σε χιλιάδες δραχμές) των 8 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι

300, 325, 330, 305, 315, 310, 320, 315

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι

310, 250, 290, 340, 270, 330, 310.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Β της εταιρείας.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

Μονάδες 9