

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  (όπου  $x$  πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή  $(c)' = 0$ .

**Μονάδες 8**

- B.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

**Μονάδες 7**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ισοπίθανα.

**Μονάδες 2**

- β.** Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

**Μονάδες 2**

γ. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $x_0$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε  
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0.$$

**Μονάδες 2**

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 2**

## **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

**Μονάδες 5**

- β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

**Μονάδες 5**

- γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

**Μονάδες 7**

- δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \approx 3,3$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

**Μονάδες 7**

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

**Μονάδες 9**

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2} x^2 + P(B) x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30΄ πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη, τότε να αποδείξετε ότι:  
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ , όπου  $c$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 8**

- B)** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

- Γ)** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

**Μονάδες 3**

- β)** Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.

**Μονάδες 3**

- γ)** Διάμεσος ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το  $n$  είναι άρτιος αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το  $n$  είναι περιττός αριθμός.

**Μονάδες 3**

- δ) Το εύρος  $R$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

**Μονάδες 3**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και  $k \in \mathbb{R}$ .

- A) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(3,8)$ , να βρείτε τον  $k$ .

**Μονάδες 5**

- B) Για  $k=-1$

- α) Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

- β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων:

1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6,  $\alpha$ , 6

όπου  $\alpha$  πραγματικός αριθμός,

η μέση τιμή είναι  $\bar{x} = 4$ .

- A) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

**Μονάδες 5**

- B) Για  $\alpha=9$

- α) Να βρείτε τη διάμεσο.

**Μονάδες 7**

- β) Να βρείτε τη διακύμανση.

**Μονάδες 8**

- γ) Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς».

Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι  $36^\circ$ . Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

- α) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

i	Χαρακτηρισμός βαθμολογίας $x_i$	Συχνότητα $n_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$	Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες $\alpha_i$
1	Άριστα				
2	Λίαν καλώς				
3	Καλώς				
4	Σχεδόν καλώς				
	Σύνολο				

**Μονάδες 16**

- β) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ( $f_i\%$ ).

**Μονάδες 9**



**ΟΛΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 8.30' απογευματινή.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Έστω  $f, g$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

**Μονάδες 9**

- B. α.** Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  μιας μεταβλητής  $X$ .

**Μονάδες 3**

- β.** Πότε δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

**Μονάδες 2**

- β.** Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x_0$  όριο έναν πραγματικό αριθμό  $\ell_1$ , δηλαδή αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell_1^v \quad (v \text{ θετικός ακέραιος}).$$

**Μονάδες 2**

δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [ - )	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
20 - 40			
40 - 60			
60 - 80			
80 - 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι  $108^\circ$ .

α. Να δείξετε ότι  $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$ ,  $f_3 = \frac{5}{10}$ ,  $f_4 = \frac{3}{10}$ .

**Μονάδες 10**

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

**Μονάδες 5**

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

**Μονάδες 5**

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

**Μονάδες 5**

### **ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  και  $p$  ένας πραγματικός αριθμός με  $0 < p < 1$ . Δίνεται ότι οι πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$  και  $P(A \cap B)$  είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p - 1, p, p + 1, p^2, p^3\}.$$

α. Να δείξετε ότι  $P(A) = p^2$ ,  $P(A \cup B) = p$  και  $P(A \cap B) = p^3$ .

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι  $P(B) = p^3 - p^2 + p$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι  $P(B - A) > P(A - B)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $x$ .



Σχήμα 1

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2.$$

**Μονάδες 6**

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

**Μονάδες 7**

- γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών  $f'(100)$ ,  $f'(101)$ ,  $f'(102)$ ,  $f'(103)$  και  $f'(104)$ .

**Μονάδες 5**

- δ. Έστω  $CV$  ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών  $f'(100)$ ,  $f'(101)$ ,  $f'(102)$ ,  $f'(103)$  και  $f'(104)$  και  $CV'$  ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά  $c$ , όπου  $c \neq 2$ . Να υπολογίσετε το  $c$ , έτσι ώστε να ισχύει  $CV' = 2CV$ .

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**