Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x\in[1,+\infty)$.

Γ.1 Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα.

ΛΥΣΗ.

f συνεχής $[1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών.

$$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

$$f''(x)=\frac{-2\sqrt{\ln x}-2x\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}}{(2x\sqrt{\ln x})^2}=\frac{-2\sqrt{\ln x}-\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}{(2x\sqrt{\ln x})^2}<0$$

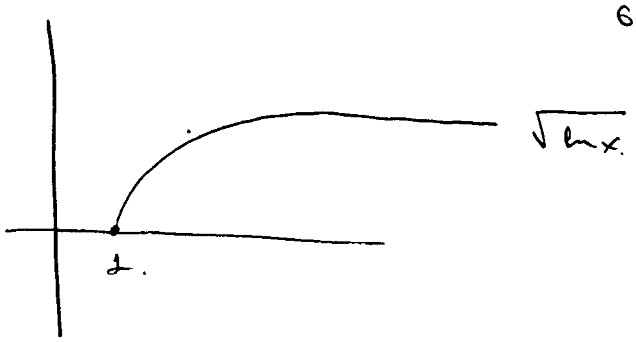
, για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Άρα f κοίλη στο $[1,+\infty)$. και

	1	$+\infty$
f'		$+\ +\ +\ +\ +$
f		$\nearrow$

στο $x_0=1$ ολ. ελάχιστο.

$f(1)=0$.



Γ.2 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται απ' το $(0,0)$.

Έστω $(x_0, f(x_0))$ σ. επαφής με $x_0 \in (1,+\infty)$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \overset{(0,0)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -f(x_0) = f'(x_0)\cdot(-x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\ln x_0} = \frac{1}{2\cancel{x_0}\cdot\sqrt{\ln x_0}}\cdot\cancel{x_0} \Leftrightarrow$$

$x_0 \neq 0$

$\ln x_0 > 0.$

$$\Leftrightarrow 2\ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{2} \overset{e^{\wedge}}{\Leftrightarrow} x_0 = e^{1/2}$$

ή $x_0 = \sqrt{e}.$

$$y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}).$$

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{\ln\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{e}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}.$$

$$=$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}\cdot\sqrt{2}}(x - \sqrt{e})$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{e}\cdot\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Γ.3 Για ποιες τιμές του x ισχύει $f^2(x) \le f(x)$

$$f^2(x) - f(x) \le 0.$$

$$f(x)\,(f(x) - 1) \le 0.$$

Αφού $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ (ολ. ελάχιστο)

η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

και

$$f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(e) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = e.$$

	1		e	
f(x)	0	+ +	+	+ +
f(x)-1		−	0	+
Γ.Ν	0	−	0	+

$x \in [1, e]$.

Γ.4 Αν Ε το εμβαδόν που περικλείεται απ' την C_f τον $x'x$ και την ευθεία $x = e$ ν.δ.ο.

$$1 < E < \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{2e}}.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν σύμφωνα με το σχήμα

$$E(e) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Από Γ.3 $f^2(x) \le f(x) \Rightarrow \ln x \le f(x)$.

και f κοίλη $\Rightarrow \int_0^1 \ln x\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx$

Άρα $f(x) \le$ εφαπτομένη $\Rightarrow 1 \le E(e)$.

η ισότητα ισχύει σο $x_0 = \frac{1}{e}$.

$f(x) < \frac{1}{\sqrt{2e}}x + \frac{-2+\sqrt{2e}}{\sqrt{2e}} \Rightarrow$ ολοκληρώνω και βγαίνει

Δ. $f(x)=e^x-1+\ln(x+1)$ $\quad x\in(-1,+\infty)$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x>0\\[2mm] 2, & x=0\end{cases}$$

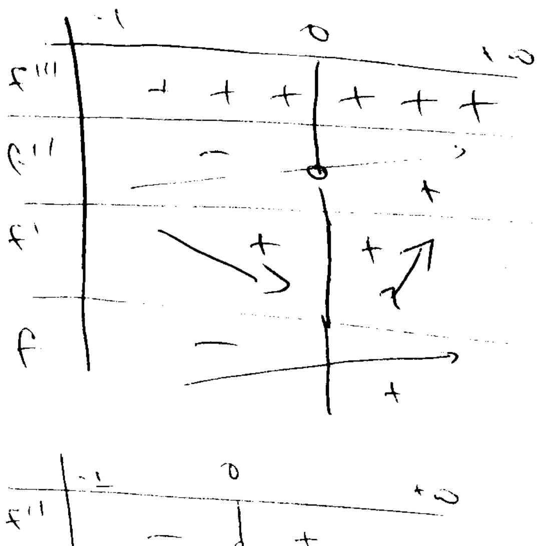
Δ.1 Μονοτονία – Κυρτότητα – Σ.Κ. της f.

$f(x)=e^x-1+\ln(x+1)$ $\quad$ προφανής $x=0$.

$f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}>0$ $\quad$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$

$f''(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\quad$ προφανής $x=0$

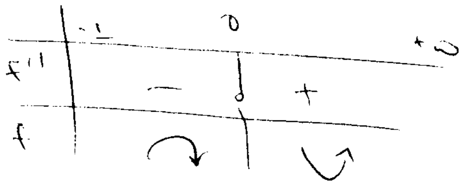
$f'''(x)=e^x+\dfrac{2}{(x+1)^3}>0$ $\quad$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.



Για $x>0 \xrightarrow{f''\uparrow} f''(x)>f''(0)=0$

$-1<x<0 \Rightarrow f''(x)<f''(0)=0$

$f'(0)=2$



Σ.Κ.

$f(0)=0$.

Δ2 Ν.δ.ο. g συνεχής και γν. αύξουσα

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1+\ln(x+1)}{x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^x + \frac{1}{x+1} = 2 = g(0)$$

Άρα συνεχής στο $x_0=0$.

~~Άρα~~ Για $x>0$ συνεχής ως πηλίκο, σύνθεση και πράξεις συνεχών.

Άρα g συνεχής $[0,+\infty)$

Για $x>0$ $\quad g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, αφού $x^2>0$

Θεωρούμε $h(x)=xf'(x)-f(x)$

$$h'(x) = \cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)} > 0 \quad \text{για } x>0$$

Άρα h γν. αύξουσα. Άρα για $x>0 \Rightarrow h(x)>h(0)$.

Άρα g γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$ $\quad g$ συνεχής στο $x_0=0$.

Δ3 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \eta\mu f(x)\cdot \ln\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot f(x)\ln\frac{1}{f(x)} = 0$

αφού

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \underset{\substack{\lim_{x\to 0^+} k=\lim f(x)=0 \\ f \text{ συνεχής}}}{\overset{\theta\acute{\epsilon}\tau\omega\ f(x)=k}{=}} \lim_{k\to 0}\frac{\eta\mu k}{k} = 1.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln\frac{1}{f(x)} \underset{y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\overset{0^+}{=}+\infty}{\overset{y=\frac{1}{f(x)}}{=}} \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y} = 0.$$

Δ4 Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0)$

$A(\alpha, f(\alpha))$ όπου $\alpha>0$.

$B(\alpha+1, f(\alpha+1))$

Ν.δ.ο

i) Τα σημεία O, A, B όχι συνευθειακά.

$$\lambda_{OA} = \frac{f(\alpha)-0}{\alpha-0}$$

$$\lambda_{OB} = \frac{f(\alpha+1)-0}{\alpha+1-0}$$

Αν O, A, B συνευθειακά

$\lambda_{OA} = \lambda_{OB} \Leftrightarrow$

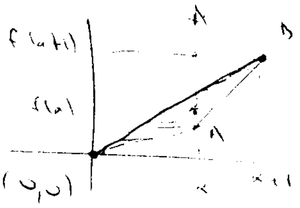
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1}$$

Δηλ. $f'(\kappa) = f'(\lambda)$

Άρα $[\kappa,\lambda]$ συνεχής,
(κ,λ) παραγωγίσιμη,
$f'(\kappa)=f'(\lambda)$
$\xRightarrow{\Theta R} f''(\xi)=0$

Άτοπο αφού $f''(x)>0 \ \forall \ x>0$.

ii) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τω $(OAB) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \cdot g'(\xi)$.



ΘΜΤ g $[\alpha, \alpha+1]$

$$g'(\xi) = \frac{g(\alpha+1)-g(\alpha)}{\cancel{\alpha}+1-\cancel{\alpha}} = \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} - \frac{f(\alpha)}{\alpha}.$$

$$g'(\xi) = \frac{\alpha f(\alpha+1) - (\alpha+1) f(\alpha)}{\alpha(\alpha+1)} \quad (1)$$

$$(OAB) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{OA}, \vec{OB})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) \\ \alpha+1 & f(\alpha+1)\end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\alpha f(\alpha+1) - (\alpha+1) f(\alpha)\right|$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left|\alpha(\alpha+1)\cdot g'(\xi)\right| \overset{\alpha>0}{=} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\left|g'(\xi)\right| \overset{g'>0}{=} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} g'(\xi).$$

ή

Δ.4 Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\alpha+1, f(\alpha+1))$.

i) ν.δ.ο O, A, B όχι συνευθειακά.

Έστω O, A, B συνευθειακά. Τότε $\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = 0$.

$\vec{OA} = (\alpha - 0, f(\alpha) - 0)$, $\vec{OB} = (\alpha+1, f(\alpha+1))$.

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & f(\alpha) \\ \alpha+1 & f(\alpha+1) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot f(\alpha+1) - (\alpha+1) f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha f(\alpha+1) = (\alpha+1) f(\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} \Leftrightarrow g(\alpha+1) = g(\alpha)$

$\overset{\text{"1-1"}}{\underset{g}{\Leftrightarrow}} \alpha+1 = \alpha$

$\Leftrightarrow 1 = 0$ Άτοπο!

ΠΙΟ ΚΑΘΑΡΑ.

Δ.3

$$\lim_{x\to 0^+} \eta\mu f(x)\cdot \ln\frac{1}{f(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot f(x)\cdot \ln\frac{1}{f(x)} = 1\cdot 0 = 0.$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \overset{f(x)=k}{\underset{\lim k = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}{=\!=\!=\!=}} \lim_{k\to 0^+} \frac{\eta\mu k}{k} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot \ln\frac{1}{f(x)} \overset{\frac{1}{f(x)}=y}{\underset{\lim y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty}{=\!=\!=\!=}} \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} 0.$$