

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  ισχύει ότι  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$  (μονάδες 2)

**β)** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

(μονάδες 2)

**γ)** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

**δ)** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

**ε)** Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , ισχύει ότι  $P(A) > P(B)$  (μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad \text{και} \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων  $\{\omega_1\}$  και  $\{\omega_3\}$  του  $\Omega$  ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2}$
- Η  $P(\omega_3)$  είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της  $f(x)$  ως προς  $x$ , όταν  $x=1$ , όπου

$$f(x) = \frac{x}{3} \ln x, \quad x > 0$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$  και  $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

**Μονάδες 10**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$ , όπου  $A'$  το συμπληρωματικό του  $A$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Αν  $P(A') = \frac{3}{4}$ , τότε να βρείτε τις πιθανότητες  $P(\omega_2)$ ,  $P(\omega_4)$ ,  $P[(A-B) \cup (B-A)]$  και  $P(A'-B')$ , όπου  $B'$  το συμπληρωματικό του  $B$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι  $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\delta = 75$   
και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x} = 74$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι  $c = 10$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές $x_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$
$[-\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
Σύνολο		

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Δίνεται ότι  $f_1 = 0,1$  ,  $f_2 = 0,3$  ,  $f_3 = 0,2$  και  $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι  $\frac{200}{3}$

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Επιλέγουμε  $k$  παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με  $k < n$ , οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x \ln x + k$ ,  $x > 0$ , όπου  $k$  ακέραιος με  $k > 1$  και την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(1, f(1))$ , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού  $E$ , με  $E < 2$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $k = 2$

**Μονάδες 5**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- Δ2.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{50}$  οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή  $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι  $\bar{x}=30$  (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda > 0$ .

Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Αν  $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$  με  $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$ , τότε να βρείτε το εύρος  $R$  και τη μέση τιμή των τιμών  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right)$ , όπου  $f(x) = x \ln x + 2$

**Μονάδες 7**

- Δ4.** Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n, n = 1, 2, 3, \dots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \dots < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

$A = \{ t \in \Omega : \text{η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της } f \text{ στο σημείο } (t, f(t)), \text{ να σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ οξεία γωνία } \}$ ,

$$B = \{ t \in \Omega : f(t) > f'(t) + 1 \},$$

$$\text{όπου } f(t) = t \ln t + 2$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$  (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  (μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$  είναι  $f'(x)=1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για τη συνάρτηση  $f(x)=\frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  ισχύει ότι  $f'(x)=\frac{1}{x^2}$  (μονάδες 2)

**β)** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι:

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

(μονάδες 2)

**γ)** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

**δ)** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

**ε)** Οι ποσότητες  $x_i, v_i, f_i$  για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων. (μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

**Β1.** Να υπολογίσετε το  $\gamma$ , αν είναι γνωστό ότι

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+6} - 3}$$

**Μονάδες 7**

**Β2.** Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της  $f$ , στα σημεία με τετμημένες 1 και  $\frac{1}{3}$  είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 8**

**Β3.** Για  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$  και  $\gamma=36$  να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι  $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\delta=75$  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{x}=74$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι  $c = 10$

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές $x_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
Σύνολο		

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**Γ3.** Δίνεται ότι  $f_1 = 0,1$  ,  $f_2 = 0,3$  ,  $f_3 = 0,2$  και  $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι  $\frac{200}{3}$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + k + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $k$  ακέραιος με  $k > 2$  και την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(1, f(1))$ , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού  $E$ , με  $E < 4$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $k = 3$

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_{50}$  οι τετμημένες 50 σημείων της ( $\varepsilon$ ) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους  $y_1, y_2, \dots, y_{50}$  έχουν μέση τιμή  $\bar{y} = 63$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\bar{x} = 30$  (μονάδες 5)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  αυξάνεται κατά 3. Οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές, και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda > 0$ .

Να βρείτε το  $\lambda$ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 5)

**Μονάδες 10**

**Δ3.** Αν  $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$  με  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$ , τότε να βρείτε το εύρος  $R$  και τη μέση τιμή των τιμών  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(1), f'(0)$ , όπου  $f(x) = x^2 + 4$

**Μονάδες 8**



**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

**Μονάδες 7**

- A2.** Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

**Μονάδες 4**

- A3.** Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x) = \sin x_0$

(μονάδες 2)

β)  $(c f(x))' = c f'(x)$

(μονάδες 2)

- γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

- δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής X χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

- ε) Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B \neq \emptyset$

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2e^x(2x-3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με

$$P(A) = x_1 \text{ και } P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_1$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{2}{3}$

**Μονάδες 6**

**B3.** Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα

**Μονάδες 5**

και

**B4.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n ως προς μία ποσοτική μεταβλητή X και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	$f_i\%$	$F_i$	$F_i\%$
$[\alpha, \cdot)$				$\lambda$
$[\cdot, \cdot)$				$3\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
<b>Σύνολα</b>				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες  $F_3$  και  $F_5$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 10$

**Μονάδες 8**

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $f_1\% = 10$  ,  $f_2\% = 30$  ,  $f_3\% = 20$  ,  $f_4\% = 30$  και  $f_5\% = 10$

**Μονάδες 5**

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha = 10$  και  $c = 4$

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ , όπου  $\omega_1 = -1$ ,  $\omega_2 = 0$  και  $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες  $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \frac{1}{3}$ , όπου  $i = 1, 2$

και 
$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$$A = \{\omega \in \Omega / f'(\omega) \leq 0\}, \quad B = \{\omega \in \Omega / f(\omega) > 1\}$$

και

$$\Gamma = \left\{ \omega \in \Omega / x^2 + \omega x \geq -\frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(\omega_1)$ ,  $P(\omega_2)$ ,  $P(\omega_3)$  και  $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(\Gamma)$  και  $P(A-B)$

(μονάδες 8)

**Μονάδες 16**

- Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$

**Μονάδες 4**

- Δ3.** Αν  $M_k(\omega_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  είναι σημεία της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ):  $y = x + 1$  με

$$2\delta_{\omega_k} = \delta_{y_k} \text{ και } R_{y_k} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα  $\omega_3$  και  $\omega_4$  του δειγματικού χώρου  $\Omega$ , όπου

$\delta_{\omega_k}$ : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων  $M_k$ ,

$\delta_{y_k}$ : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων  $M_k$  και

$R_{y_k}$ : το εύρος των τεταγμένων των σημείων  $M_k$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

**Μονάδες 4**

**A3.** Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x) = \sin x_0$

(μονάδες 2)

β)  $(c f(x))' = c f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής  $X$  χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Για τις σχετικές συχνότητες  $f_i$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, k$  των τιμών  $x_i$  μιας μεταβλητής  $X$ , ισχύει:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 - \beta x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 9)$  και ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{12\alpha}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 6$

**Μονάδες 9**

**B2.** Για  $\alpha = 2$  και  $\beta = 6$  να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f$  γίνεται ελάχιστος.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $x_1, x_2, x_3, x_4$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , όπου:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad 1 < x_3 < x_4,$$

$$f_1 = g(x_1) - \frac{1}{3}, \quad f_2 = g(x_2) - \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad f_3 = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x-1}$$

Τότε :

**Γ1.** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $g$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** αν η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) έχει εξίσωση  $y = x+1$  και σε αυτήν ανήκουν τα σημεία  $M_k(x_k, y_k)$ , όπου  $k = 1, 2, 3, 4$  για τα οποία ισχύει

$$2\delta_{x_k} = \delta_{y_k} \quad \text{και} \quad R_{y_k} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τις τιμές  $x_3$  και  $x_4$  της μεταβλητής  $X$ , όπου

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

$\delta_{x_k}$  : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων  $M_k$  ,

$\delta_{y_k}$  : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων  $M_k$  και

$R_{y_k}$  : το εύρος των τεταγμένων των σημείων  $M_k$

**Μονάδες 5**

**Γ4.** να υπολογίσετε τη μέση τιμή των τιμών  $x_1, x_2, x_3, x_4$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  ως προς μία ποσοτική μεταβλητή  $X$  και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους  $c$ , όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	$f_i\%$	$F_i$	$F_i\%$
$[\alpha, \cdot)$				$\lambda$
$[\cdot, \cdot)$				$3\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
$[\cdot, \cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$
<b>Σύνολα</b>				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες  $F_3$  και  $F_5$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0, \text{ όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } \kappa \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 10$

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f_1\% = 10$  ,  $f_2\% = 30$  ,  $f_3\% = 20$  ,  $f_4\% = 30$  και  $f_5\% = 10$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha = 10$  και  $c = 4$

(μονάδες 4)



Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)  
**Μονάδες 8**

- Δ4.** Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 4**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**