

∫ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ
∫ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΡΗΤΗ
∫ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ
∫ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ
∫ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ

Γενικά η μέθοδος της αντικατάστασης έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών και χρησιμοποιείται είτε για να απλοποιήσει το ολοκλήρωμα είτε για να μας οδηγήσει σε μια υπολογίσιμη μορφή ολοκληρώματος. Δύο πρακτικές συμβουλές :

- **Θέτουμε την πιο σύνθετη ποσότητα .**
- **Θέτουμε τον παρονομαστή του ολοκληρώματος ώστε η παράγωγός του να μας δώσει ότι περισσεύει (.....)dx**
- * Πολλά ολοκληρώματα λύνονται με περισσότερες από μία αντικαταστάσεις!!!!

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_A^B f(t) dt ,$$

Θέτουμε όπου

$$g(x)=t \Rightarrow g'(x) dx = dt$$

όπου A,B τα νέα άκρα ολοκλήρωσης

Παρατηρούμε σε πρώτη φάση ότι η μία συνάρτηση είναι η παράγωγος της άλλης!!

ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΙΣ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha x + \beta)^v (\gamma x + \delta)^u dx \quad \text{Θέτουμε } t = \alpha x + \beta, v \geq \mu$$

Λύνουμε ως προς x και παραγωγίζουμε

$$I = \int_0^1 (x-1)^3 (2x-1) dx \quad I = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{(2x-1)^5}$$

2.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt{g(x)}) dx \quad \text{Θέτουμε } t = \sqrt{g(x)}$$

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} dx \quad I = \int_2^6 x \sqrt{x-2} dx$$

| | | |
|----|---|--|
| 3. | $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx$ <p>Θέτουμε $t = \sqrt{\alpha x + \beta}$</p> | $I = \int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$ |
| 4. | $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt[p]{\alpha x + \beta}, \sqrt[q]{\alpha x + \beta}) dx$ <p>Θέτουμε $t = \sqrt[p]{\alpha x + \beta}$ $\rho = \text{ΕΚΠ}(\mu, \nu)$</p> | $I = \int_2^3 \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx \quad I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ |

5.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx$$

R : ρητή συνάρτηση

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow & \text{τότε είναι ταυτότητα} \\ & \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = (x - \rho_1)t \\ \Delta > 0 \Rightarrow & \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{\alpha}(x - t) \quad \alpha > 0 \\ & \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \sqrt{\alpha}(x - t) \\ \Delta < 0 \Rightarrow & \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = t \pm x\sqrt{\alpha} \quad \alpha > 0 \\ & \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = tx \pm \sqrt{\gamma} \quad \gamma > 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{3 - 4x^2} dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{\left(\sqrt{7x - 10 - x^2}\right)^3}$$

ΑΡΡΗΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt{\pm \alpha^2 \pm \beta^2 x^2}\right) dx$$

6.
$$\begin{cases} I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) dx \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon \varphi u \\ I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}\right) dx \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \eta \mu u \\ I = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt{-\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right) dx \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \sigma \upsilon \nu u \end{cases}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{xdx}{\sqrt{6x - x^2}}$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{x^2 - 16} dx$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{3 - 4x^2} dx$$

ΕΚΘΕΤΙΚΑ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

7.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(e^{\alpha x}) dx \quad I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\ln(\alpha x + \beta)) dx$$

Θέτουμε $t = e^{\alpha x}$

Θέτουμε $t = \ln(\alpha x + \beta)$

$$I = \int_0^1 \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} dx \quad I = \int_0^1 \frac{2e^{2x} + e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad I = \int_0^{11} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$I = \int_0^{\ln \pi} e^{2x} \sin e^x dx \quad I = \int_0^{11} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

8.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} R(\eta \mu x, \sigma \nu x) dx$$

R : ρητή συνάρτηση

Αν R είναι περιττή ως προς $\eta \mu x$

θέτουμε $\sigma \nu x = t$

Αν R είναι περιττή ως προς $\sigma \nu x$

θέτουμε $\eta \mu x = t$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu^2 x + 4 \sigma \nu x + 3} dx$$

9.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\eta \mu^v x \sigma \upsilon \nu^k x} dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\eta \mu^v x} dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^v x} dx$$

Γράφουμε τον αριθμητή
ως $\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x$
και διασπάμε το κλάσμα

ή

πολ / ζω αριθμητή και παρονομαστή
με $\eta \mu x$ ή $\sigma \upsilon \nu x$ αντίστοιχα

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\eta \mu 2x} \quad I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\eta \mu x} \quad I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sigma \upsilon \nu x}$$

10.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^{\mu} x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx$$

μ ή ν περιττός

Έστω $\mu = \text{περιττός}$

Διασπάμε την περιττή δύναμη ξεχωρίζοντας ένα $\eta \mu x$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^{\mu} x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx \stackrel{\mu=2\kappa+1}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^{2\kappa} x \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx$$

Γράφουμε το $\eta \mu^{2\kappa} x = (\eta \mu^2 x)^{\kappa}$

και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta \mu^2 x = 1 - \sigma \upsilon \nu^2 x$$

και θέτουμε $\sigma \upsilon \nu x = t$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^{2\kappa} x \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx = \int_{\alpha}^{\beta} (\eta \mu^2 x)^{\kappa} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \sigma \upsilon \nu^2 x)^{\kappa} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx$$

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\eta \mu^5 x}{\sigma \upsilon \nu^4 x} dx \quad I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma \upsilon \nu^4 x}{\eta \mu^2 x} dx$$

11.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^{\mu} x dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma \upsilon \nu^{\mu} x dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \epsilon \varphi^{\mu} x dx$$

Με τη βοήθεια των τύπων

$$\eta \mu^2 x = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{2}$$

$\mu = \acute{\alpha}$ ρτιος

$\mu = \pi$ εριττός

$$\sigma \upsilon \nu^2 x = \frac{1 + \sigma \upsilon \nu 2x}{2}$$

$\mu = \acute{\alpha}$ ρτιος

$\mu = \pi$ εριττός

$$\epsilon \varphi^2 x = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} - 1$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^2 x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{2} dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^3 x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu^2 x \eta \mu x dx =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma \upsilon \nu^2 x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 + \sigma \upsilon \nu 2x}{2} dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma \upsilon \nu^3 x dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma \upsilon \nu^2 x \sigma \upsilon \nu x dx =$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \epsilon \varphi^3 x dx$$

12.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu \alpha x \sigma \upsilon \nu \beta x dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu \alpha x \eta \mu \beta x dx$$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma \upsilon \nu \alpha x \sigma \upsilon \nu \beta x dx$$

Με τη βοήθεια των τύπων

$$2\eta \mu \alpha x \sigma \upsilon \nu \beta x = \eta \mu (\alpha - \beta) x + \eta \mu (\alpha + \beta) x$$

$$2\eta \mu \alpha x \eta \mu \beta x = \sigma \upsilon \nu (\alpha - \beta) x + \sigma \upsilon \nu (\alpha + \beta) x$$

$$2\sigma \upsilon \nu \alpha x \sigma \upsilon \nu \beta x = \sigma \upsilon \nu (\alpha - \beta) x - \sigma \upsilon \nu (\alpha + \beta) x$$

Άσκηση σχολικού βιβλίου Β6 Σελίδα 199