ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α . ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

1. Έστω μια συνάρτηση f και ***ένα σημείο x_o*** του πεδίου ορισμού της.Θα λέμε ότι η f είναι ***συνεχής στο x_o*** όταν: $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.
2. Έστω μια συνάρτηση f και ***ένα σημείο x_o*** του πεδίου ορισμού της.Θα λέμε ότι η f είναι ***συνεχής στο x_o*** όταν: $\lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = f(x_o)$.

   Μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής όταν :
   i. Δεν υπάρχει το όριο στο x_o
   ii. $\lim_{x\to x_o} f(x) \neq f(x_o)$
   iii. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_o \in A$ αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια απειρίζεται θετικά ή αρνητικά

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

1. Μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
2. Μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και $\begin{cases} \lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \\ \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta) \end{cases}$

❖ Ανάλογοι ορισμοί ισχύουν και για διαστήματα της μορφής (α,β] , [α,β).

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ όταν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $|x_1 - x_2| < \delta$ να ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Γ. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.
2. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής.
3. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς***.
4. Κάθε εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 :
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_o, τότε είναι συνεχείς στο x_o και οι συναρτήσεις :

i. $f+g$
ii. $c\cdot f\ ,\ c\in\mathbb{R}$
iii. $f\cdot g$
iv. $\frac{f}{g}$
v. $|f|$
vi. $\sqrt[\nu]{f}$
vii. f^{-1}
viii. f^{ν}
ix. $f-g$
x. $f+c$

με την προυπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_o.

Τα αντίστροφα δεν ισχύουν(ii. μόνο για c=0)

πχ. $f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ -1, x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-1, x\geq 0\\ 1, x<0\end{cases}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 :
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_o)$,τότε και η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_o.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 :
Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα $A\subseteq\mathbb{R}$ τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ4 :
Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα f(Δ).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α είναι συνεχής στο x_o τότε :

i. $x_o\in A$
ii. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$
iii. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\in\mathbb{R}$
iv. $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$

2. Αν η f συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα (α,β) και (β,γ) τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$.

3. Αν η f συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα [α,β] και [β,γ] τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο [α,γ].

4. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_o\neq 0$ και είναι άρτια ή περιττή τότε θα είναι και συνεχής στο $-x_o$.

5. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o , δεν είναι αναγκαστικά συνεχής και σε μια περιοχή αυτού του σημείου.

6. Μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_o \in A$ αν και μόνο αν:

i. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

ii. $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) - f(x_o)\right] = 0$

iii. $\lim\limits_{h \to 0} f(x_o + \kappa h) = f(x_o), \kappa \neq 0$

iv. $\lim\limits_{h \to 1} f(x_o \cdot h) = f(x_o), x_o \neq 0$

7. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο x_o τότε και οι $\kappa f \pm \lambda g$ είναι συνεχείς στο x_o όπου κ,λ πραγματικοί αριθμοί.

8. Έστω ότι το $x_o \notin A$. Σε αυτή τη περίπτωση δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η είναι ή όχι συνεχής στο x_o.

9. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_o \in A$ αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια απειρίζεται θετικά ή αρνητικά .

10. Όταν λέμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής, εννοούμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

11. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι συνεχής και σε κάθε υποσύνολό του.

12. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε είναι συνεχής και σε κάθε κλειστό υποσύνολό του Δ.

13. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο Α και $\left[a, \beta\right] \subseteq A$,τότε δεν είναι σωστό να λέμε ότι η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του [α,β] ,αφού η f μπορεί να μην είναι συνεχής στα άκρα α,β αλλά να είναι συνεχής στο [α,β].Αν όμως η f ορίζεται μόνο στο [α,β] τότε η f είναι συνεχής στο [α,β] όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του [α,β].

14. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο[α,β], τότε ορίζεται στο [α,β].Επομένως είναι πλεονασμός να λέμε ορισμένη και συνεχής.