ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$
ΟΡΙΣΜΟΣ

1. Έστω μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$.Ορίζουμε :

- $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, όταν για κάθε Μ>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$,με $0<|x-x_o|<\delta$ να ισχύει $f(x)>M$.
- $\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty$, όταν για κάθε Μ>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$,με $0<|x-x_o|<\delta$ να ισχύει $f(x)<-M$.

ΙΣΧΥΟΥΝ : $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o^+} f(x)=\lim_{x\to x_o^-} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o^+} f(x)=\lim_{x\to x_o^-} f(x)=-\infty$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty$

Η ευθεία x= x_0 λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν και μόνο όταν ισχύει : $\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty$ *ή* $\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim_{x\to x_o^-} f(x)=+\infty$

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Αν $\lim_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty \quad\Rightarrow\quad f(x)>0$ κοντά στο x_o

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Αν $\lim_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=-\infty \quad\Rightarrow\quad f(x)<0$ κοντά στο x_o

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Αν για τις συναρτήσεις f,g κοντά στο x_o ισχύει $f(x)\le g(x)$ και

i. $\lim_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_o} g(\mathrm{x})=+\infty$

ii. $\lim_{x\to x_o} g(\mathrm{x})=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=-\infty$

ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ :

Αν $\lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x})=\pm\infty$ και η συνάρτηση g είναι φραγμένη τότε : $\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\pm\infty$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_o}\left(-f(\mathrm{x})\right)=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=-\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_o}\left(-f(\mathrm{x})\right)=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty$ ή $-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(\mathrm{x})}=0$

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_o, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(\mathrm{x})}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_o, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(\mathrm{x})}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty$

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=+\infty$ ή $-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}\left|f(\mathrm{x})\right|=+\infty$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά για ***άρτιες δυνάμεις*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και γενικά για ***περιττές δυνάμεις*** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}$

10. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και γενικά για ***περιττές δυνάμεις*** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty, \nu\in\mathbb{N}$

- ***Επομένως το όριο της*** $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}}$ ***δεν υπάρχει στο x=0.***

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Με βάση τις ιδιότητες των άπειρων ορίων , επεκτείνουμε τις πράξεις του $\mathbb{R}$ στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ ως εξής :

1. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$

2. $(+\infty)+a=+\infty$ $\quad (-\infty)+a=-\infty$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

3. $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $\quad (-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ $\quad (-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

4. $a\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, a>0\\-\infty, a<0\end{cases}$ $\quad a\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, a>0\\+\infty, a<0\end{cases}$

5. $\dfrac{a}{+\infty}=\dfrac{a}{-\infty}=0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: ΟΡΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	;
$-\infty$	$+\infty$	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: ΟΡΙΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$
α>0	$+\infty$	$+\infty$
α<0	$+\infty$	$-\infty$
α>0	$-\infty$	$-\infty$
α<0	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	;
0	$-\infty$	;
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΕΣ

1. $(+\infty)+(-\infty)$
2. $(-\infty)-(-\infty)$
3. $(+\infty)-(+\infty)$
4. $0\cdot(\pm\infty)$
5. $\frac{0}{0}$
6. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
7. 0^0
8. 1^∞
9. ∞^0

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Αποδεικνύεται ότι :

1. $$\lim_{x\to x_o}\frac{1}{(x-x_o)^{2\nu}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$$

2. $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{1}{(x-x_o)^{2\nu+1}}=+\infty \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{1}{(x-x_o)^{2\nu+1}}=-\infty\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_o}\frac{1}{(x-x_o)^{2\nu+1}}=\delta\varepsilon\nu \text{ υπάρχει, } \nu\in\mathbb{N}$$

3. $$\lim_{x\to x_o}\frac{1}{|x-x_o|}=+\infty$$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΟΡΙΩΝ

1. $\sqrt{A\pm\sqrt{B}} \overset{A^2-B=\Gamma^2}{=} \sqrt{\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}}$
2. $x^\nu-y^\nu=(x-y)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}y+....+y^{\nu-1}\right)$
3. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
4. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ (k28)
5. $1+\sigma\upsilon\nu 2x=2\sigma\upsilon\nu^2 x$ $1-\sigma\upsilon\nu 2x=2\eta\mu^2 x$ $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x$
6. $\eta\mu 2x=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$
7. Αν το τόξο x εκφράζεται σε μοίρες και όχι σε ακτίνια τότε : $\lim\limits_{x\to 0^o}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{\pi}{180^o}$