

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

**B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**B2.** Αν  $z_1 = 1+i$  και  $z_2 = 1-i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

**B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $h$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο  $-\infty$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ , τον άξονα  $x'Ox$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$  και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η  $x = 0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο  $M$  ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=0$  από ένα σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$  και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq x_0$  με  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \geq 0$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$  του σημείου  $M$  είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του  $y(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

(μονάδες 4)

**Μονάδες 11**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

**β)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

- δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(μονάδες 2)

- ε) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

- B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

- B2.** Αν  $z_1 = 1+i$  και  $z_2 = 1-i$  είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με  $-3i$

**Μονάδες 8**

- B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου  $w, z_1, z_2$  οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = (x-3)^2(x-1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 8**

- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία

**α)** είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση  $y = 4x + 3$

και

**β)** η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της  $f$  είναι ακέραιος αριθμός.

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (x-1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $h$  με  $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}$ ,  $x \neq -1$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  στο  $+\infty$ , τότε

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$

**Μονάδες 7**

- Δ2. α)** Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$  και στο  $-\infty$ .

**β)** Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $h$ .

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο, όμως, η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ) Αν είναι  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

(μονάδες 2)

δ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , τότε υποχρεωτικά  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

ε)  $\left( \int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z-i}{2z+i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$
- $w$  φανταστικός

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

$\rho = \frac{1}{2}$ , εκτός από το σημείο  $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει  $|w| = 1$

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν είναι  $z = \frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** i) Να αποδείξετε ότι, για  $x > 0$ , ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 = 4^x$ ,  $x > 0$ , έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 4$

(μονάδες 6)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (2, 4)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) \int_2^\xi f(t) dt = f(\xi) (\sqrt{2} - f(\xi))$$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών  $f(A) = \mathbb{R}$ , τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

Για τα ερωτήματα **Δ2** και **Δ3**, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3)  
Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα  $y'y$ , και την ευθεία  $x=1$  (μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θεωρούμε τα σημεία  $A(x, f^{-1}(x))$ ,  $B(f^{-1}(x), x)$  των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  $x \in \mathbb{R}$  η απόσταση των σημείων  $A$ ,  $B$  γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$ , να αποδείξετε ότι

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι ίσες;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε πάντοτε ισχύει  $f \circ g = g \circ f$

(μονάδες 2)

δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ , όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

(μονάδες 2)

ε)  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x, \quad x \in \mathbb{R}$

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \frac{2z - i}{2z + i}, \quad z \neq -\frac{i}{2}$
- $w$  φανταστικός

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = \frac{1}{2}$ , εκτός από το σημείο  $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$  του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει  $|w| = 1$

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν είναι  $z = \frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i w^7 = 0$$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y = 4x - 2$  να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  **Μονάδες 7**

Στη συνέχεια, για  $\alpha = 1$

- Γ2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  (μονάδες 4)  
ii) Να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την παρακάτω ανίσωση (μονάδες 6)

$$f(x^3 + x) > 10$$

**Μονάδες 10**

- Γ3. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x^2 + 1} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x f'(x) = 2x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 10$

- Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

**Μονάδες 6**

- Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

- Δ3. Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f'$

**Μονάδες 5**

- Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) - 10 \leq (x - 1) f'(x), \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

**Μονάδες 8**



**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{μονάδες 2})$$

**β.** Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό. (μονάδες 2)

**γ.** Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$  (μονάδες 2)

**δ.** Ισχύει:  $(\sin x)' = \eta \mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2)

**ε.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad (\text{μονάδες 2})$$

**Μονάδες 10**

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$|z + 4| = 2|z + 1|$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$

**Μονάδες 9**

- B2.** Αν  $z_1$  ο πραγματικός αριθμός με  $\operatorname{Re}(z_1) > 0$  και  $z_2$  ο φανταστικός αριθμός με  $\operatorname{Im}(z_2) < 0$  είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος **B1**, τότε να αποδείξετε ότι:

$$z_1 = 2 \quad \text{και} \quad z_2 = -2i$$

**Μονάδες 8**

- B3.** Αν  $z_1, z_2$  είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20}$$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$

- Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία (μονάδες 5) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$e f(x) \leq 1 \quad \text{για κάθε } x > 0 \quad (\text{μονάδες 5})$$

**Μονάδες 10**

- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \frac{1}{e}$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  (μονάδες 4).  
Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις  $x_1 = 0$  και  $x_2 = 1$  (μονάδες 5)

**Μονάδες 9**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$

**Μονάδες 8**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, 1)$  (μονάδες 4) και, στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα  $(0, 1]$  την εξίσωση:

$$\int_1^x f(t) dt = x - 1 \quad (\text{μονάδες 4})$$

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ