## *ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΟΡΙΣΜΟΙ*

**1.** Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$ ,τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\ell$

- Αν x<$x_0$ τότε έχουμε το ***αριστερό όριο*** $\lim_{x\to x_o^-} f(x)$
- Αν x>$x_0$ τότε έχουμε το ***δεξιό όριο*** $\lim_{x\to x_o^+} f(x)$
- Αν η ορίζεται σε διάστημα $(x_o,\beta)$ τότε : $\lim_{x\to x_o} f(x)=\lim_{x\to x_o^+} f(x)$
- Αν η ορίζεται σε διάστημα $(\alpha,x_o)$ τότε : $\lim_{x\to x_o} f(x)=\lim_{x\to x_o^-} f(x)$

**2.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$ .Θα λέμε ότι η f έχει στο $x_o$ όριο $\ell\in\mathbb{R}$ , όταν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιος ώστε για κάθε $x\in(a,x_o)\cup(x_o,\beta)$ ,με $0<|x-x_o|<\delta$ , να ισχύει : $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ .

**3.** Όταν $x\to x_o$ θεωρούμε $x\neq x_o$ . Μπορούμε επίσης να πάρουμε x τα οποία είναι πολύ κοντά στο $x_o$ ,δηλαδή να θεωρήσουμε ότι $x\in(x_o-\delta,x_o)\cup(x_o,x_o+\delta)$ για οποιοδήποτε πολύ μικρό δ>0.

- ***Αν υπάρχει το όριο αυτό είναι και μοναδικό.***
- ***Το $x_o$ μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης μπορεί και όχι.***
- ***Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x\to x_o} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων στα οποία η f είναι ορισμένη.***
- ***Για να έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim_{x\to x_o} f(x)$, αρκεί το $x_o$ να είναι άκρο ή σημείο ενός διαστήματος του πεδίο ορισμού της f.***
- ***Η έννοιες το όριο ορίζεται και το όριο υπάρχει είναι διαφορετικές.***

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ***

**1.** $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}(f(x)-\ell)=0$

**2.** $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(-x)=\ell$

**3.** $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}|f(x)-\ell|=0$

**4.** $\lim_{x\to x_o} f(x) \overset{x=x_o+h}{=} \lim_{h\to 0} f(x_o+\mathrm{h})$

**5.** $\lim_{x\to x_o} f(x) \overset{x=x_o h}{=} \lim_{h\to 1} f(x_o\mathrm{h}),\ \mathrm{x}_o\neq 0$

## ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1** : Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f(x)>0$ κοντά στο $x_o$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2** : Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f(x)<0$ κοντά στο $x_o$

Αν f(x)=0 δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3** : Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο $x_o$ και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο $x_o$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)\le \lim_{x\to x_o} g(x)$

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_o} f(x)$ , $\lim_{x\to x_o} g(x)$ και είναι :

- ✓ $f(x)>0$ κοντά στο $x_o \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)\ge 0$
- ✓ $f(x)<0$ κοντά στο $x_o \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)\le 0$
- ✓ $f(x)<g(x)$ κοντά στο $x_o \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)\le \lim_{x\to x_o} g(x)$
- ✓ $f(x)\ge g(x)$ δεν ισχύει $\lim_{x\to x_o} f(x)> \lim_{x\to x_o} g(x)$
- ✓ $\lim_{x\to x_o} f(x)< \lim_{x\to x_o} g(x) \Rightarrow f(x)<g(x)$ κοντά στο $x_o$
- ✓ $\lim_{x\to x_o} f(x)> \lim_{x\to x_o} g(x) \Rightarrow f(x)>g(x)$ κοντά στο $x_o$

Αν ένα από τα όρια δεν υπάρχουν δεν μπορούμε να μιλάμε για διάταξη.

Το όριο δεν διατηρεί τη γνήσια διάταξη.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ**

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h.Αν $\left\{\begin{array}{c} h(x)\le f(x)\le g(x) \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim_{x\to x_o} h(x)=\lim_{x\to x_o} g(x)=\ell\in\mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x)=\ell$

- ✓ Το κριτήριο ισχύει και για $h(x)<f(x)<g(x)$
- ✓ Αν $\lim_{x\to x_o} h(x)\ne \lim_{x\to x_o} g(x)$ δεν βγαίνει κάποιο συμπέρασμα .

**ΒΑΣΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ**

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $|\eta\mu x|\le |x|$ .Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

**ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ :** Έστω μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ .Λέμε ότι είναι φραγμένη όταν:

i. $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in A$ και $m,M\in\mathbb{R}$ .

ii. $|f(x)|\le\kappa$ για κάθε $x\in A$ και $\kappa>0$ πχ $|\eta\mu g(x)|\le 1, |\sigma\upsilon\nu g(x)|\le 1$

## *ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ*

**Αν υπάρχουν** στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο $x_o$ τότε :

1. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(\mathrm{x})+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)+\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\kappa f(\mathrm{x})\right)=\kappa\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$ ,για κάθε σταθερά $\kappa\in\mathbb{R}$ .
3. $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(\mathrm{x})\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(\mathrm{x})}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o}g(x)}$ ,εφόσον $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)\neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_o}|f(\mathrm{x})|=\left|\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}$ ,εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο $x_o$
7. $\lim\limits_{x\to x_o}f^{\nu}(\mathrm{x})=\left(\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\right)^{\nu}$ , $\nu\in\mathbb{N}^*$

- Οι ιδιότητες **1.** και **3.** ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν πάντα . π.χ. $f(x)=\begin{cases}-1, x>0\\ 1, x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$

## *ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ*

1. $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$

2. $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$

3. $\lim\limits_{x\to x_o} x^{\nu} = x_o^{\nu}$

4. $\lim\limits_{x\to x_o} P(x) = P(x_o)$

5. $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$ , $Q(x_o) \neq 0$

6. $\lim\limits_{x\to x_o} \eta\mu x = \eta\mu x_o$

7. $\lim\limits_{x\to x_o} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_o$

8. $\lim\limits_{x\to x_o} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_o$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x} = 1$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

13. $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0$

14. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x} = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$

15. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\nu}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{x} = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu a x}{x} = a$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi a x}{x} = a$

18. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

21. $\lim\limits_{x\to x_o} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = 0$, όπου

    $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ και g φραγμένη.

22. $\lim\limits_{x\to x_o} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_o} f(u)$ .

    Θέτω $u = g(x)$ και βρίσκω

    (αν υπάρχουν) $\begin{cases} u_o = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) \\ \ell = \lim\limits_{u\to u_o} f(u) \end{cases}$ .Αν

    $g(x) \neq x_o$ τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $\ell$ .

***ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ***

- $\lim\limits_{x\to x_o}|f(\mathrm{x})|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to x_o} f^{\nu}(\mathrm{x})=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=0 \quad , \nu\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to x_o} f^{2}(\mathrm{x})=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(\mathrm{x})=0$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\ell$ και $f(x)\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\ell}$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$ και $|f(x)|\leq g(x)$ για κάθε $x\in(a,\beta)$ τότε ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$
- Αν $f(x)=g(x)$ κοντά στο $x_o$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ Δεν ισχύει το αντίστροφο .

***ΠΡΟΣΟΧΗ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ***

- Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f^{2}(\mathrm{x})=\ell$ ,τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και είναι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\sqrt{\ell}$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(\mathrm{x})|=\ell$ τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και είναι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\pm\ell$