ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.* Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\,\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\,\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3+4i$ και $z_2 = 1-\sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2\rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2\rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert\bar{z_1}\rvert$	**δ.** 5
5. $\lvert i\,z_2\rvert$	**ε.** –2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{o}

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x\le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = – 1 / 9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^{o}

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x\in R,$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^{o}

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x\in R$

ii) $f(x) = 1-2x^2\int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x\in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε x∈ R.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (x f(x) ημ2x).

Μονάδες 7

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΗ

ΘΕΜΑ 4^{Ο}

α) Το αριστερό μέλος της σχέσης $f(x) = -2xf^2(x)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης f.

ΑΠΟ ΤΗΝ Κ. Ε. Ε.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Αν $z_1 = \varrho_1(\text{συν}\,\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \varrho_2(\text{συν}\,\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2[\text{συν}\,(\theta_1+\theta_2)+i\,\text{ημ}\,(\theta_1+\theta_2)]$$

Μονάδες 6,5

β) Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. Re(z)	**1.** $-\alpha - \beta i$
Β. Im(z)	**2.** $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	**3.** $\alpha + \beta$
Δ. $\bar{z}$	**4.** α
Ε. $\lvert z \rvert$	**5.** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot \bar{z}$	**6.** $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Μονάδες 6

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(3, f(3)\right)$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \le f(x) \le 2 + x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$

Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5{,}5+\dfrac{x^2}{200}\right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x\,, \quad 0 < x \leq 90\,.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα <u>δεν θα τα αντιγράψετε</u> στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.</u>
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας σε όλα</u>** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(x)=F(x)+C$, $C\in\mathbf{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x)=F(x)+C$, $C\in\mathbf{R}$

Μονάδες 6,5

Α.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \ldots..$ **β.** $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx = \ldots..$ **γ.** $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \ldots..$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

Μονάδες 6

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x\in\mathbf{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0,3) έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\left(e^x+x\right)dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)\, dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+16| = 4|z+1|$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z-1| = |z-i|$

Μονάδες 9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+\alpha, & x \le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right) \ln(x-1), & x \in (1,2] \end{cases}$,όπου $\alpha \in \mathbf{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbf{R}$ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0=1.

Μονάδες 11

γ. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}\, dt \text{ με } x > 0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x},\ x>0$

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι, αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in$ **R** είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Μονάδες 6,5

β) Αν $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in$ **R**, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. $z+\overline{z}$	**1.** $\alpha-\beta$
Β. $z-\overline{z}$	**2.** 2α
Γ. $z\cdot\overline{z}$	**3.** $2\beta i$
Δ. $\lvert\overline{z}\rvert$	**4.** $\alpha+\beta$
	5. $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
	6. $\alpha^2+\beta^2$

Μονάδες 6

Β. α)Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = k + 15i$ και $z_2 = 5+\lambda i$, όπου $k, \lambda \in$ **R**. Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε να ισχύει $z_1=5\,\overline{z_2}$

.Μονάδες 6

β)Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, ώστε να ισχύει $z\cdot\overline{z} + (z-\overline{z}) = 5 + 2i$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - kx + 1$, όπου $x \in R$.

α)Να βρείτε την τιμή του k, για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α (1,0).

Μονάδες 12

β)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Β (0, f(0)), όταν k=17.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2}{1+i}$

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στη μορφή z=x+yi, όπου $x, y \in \mathbf{R}$.

Μονάδες 8

β)Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό z.

Μονάδες 8

γ)Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, όπου $x \in \mathbf{R}$

α)Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.

Μονάδες 12

γ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 3

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=$**η**.

Μονάδες 6,5

Β. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει:

$$x\left(f(x)-2x+2\right) = ημx \quad , \quad \text{για κάθε } x\in \mathbf{R}^*.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0 , \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι, ώστε $w = \frac{z-3i}{1+i}$.

Α. α) Αν $w=2-2i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι:

Α) 3 Β) 4 Γ) 5 Δ) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 5

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 7,5

Β. α) Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{x+y-3}{2} \quad , \quad \mathrm{Im}(w) = \frac{-x+y-3}{2}$$

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\mathrm{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$$

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - 2x$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \dfrac{e}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με

$$f''(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

Μονάδες 8

β) $\left(f(x) \cdot e^x\right)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Μονάδες 8

γ) ο τύπος της f είναι $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Μονάδες 9