



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	1
ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ	5
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ	16
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	31
ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ.....	39
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ	47
ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.....	52
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.....	56
ΕΜΒΑΛΑ	66
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ	68

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.....	86
ΌΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ	104
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ-ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ	136
ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ.....	168
ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ.....	226
ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ	249



Α. ΙΣΟΤΗΤΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ – ΣΥΖΥΓΕΙΣ -
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει:

α) $(x-2y) + (x+2y)i = 1-3i$	στ) $(y^2+4y) - (2x-x^2)i = -4+i$
β) $\frac{1+xi}{1-xi} = \frac{1+7i}{5(1-i)}$	ζ) $\frac{x-1}{2-3i} + \frac{y-2}{3-2i} = \frac{10}{13(1-i)}$
γ) $(x^2+2) + (x^2-x)i = 3$	η) $5+x(1+3i) = 11i - y(5+2i)$
δ) $x(5+3xi) + 2xyi - 1 = 2y(1+3i) + 27i$	θ) $2x(1+2xi) - 1 = y(1+yi) + (4a-1)i$
ε) $(x^2+y^2) + 2i = 10 + (x+y)i$	ι) $x(1+2i) - xyi = y(1+i) + a(1-ai)$

2. Αν $z = (x-2) + (y-1)i$, $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των x, y ώστε:

i. $z=0$ ii. $z \neq 0$ iii. $z \in \mathbb{R}$ iv. $z \in I$ v. $z \notin I$ vi. $z \notin \mathbb{R}$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $z \in \mathbb{R}$, ο αριθμός $z = (x-i)(1+i)^2 + (x^2-3)i + x$ είναι:
i. πραγματικός ii. φανταστικός

4. Να βρεθεί ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει:

i) $\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = 2\operatorname{Re}(z) - 4\operatorname{Im}(z) - 5$ ii) $z = \operatorname{Re}^2(z)i + \operatorname{Im}^2(z)$

5. Δίνονται οι μιγαδικοί z της μορφής: $z = (x^3 - x^2 - 4) + (x^2 - x - 2)i$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ ώστε: i. $z \in \mathbb{R}$ ii. $z \in I$ iii. $z=0$ iv. $z < 0$

6. Να γίνουν οι πράξεις και να γράψετε τους μιγαδικούς στη μορφή $a+bi$:

α) $i(2-i) + 2i(1-i) - 3i(i^2-2)$	στ) $(\eta\mu x + i\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x)$
β) $3i(2i-a) - (i-a)(i+3a) + a(5i-3a)$	ζ) $(i^2-2i+3)(i^2+i-1)$
γ) $(i-1)(3i^2+2i+5)$	η) $(3-2i)^2 - (2-3i)^2 + (-2-3i)^2$
δ) $(1-i)(1+i)(i+2) - (i-1)^3 - (2i-1)^2$	θ) $(2+i\sqrt{3})^3 + (2-i\sqrt{3})^3$
ε) $(1-\sqrt{3}i)i - (3i+1)i - i^3(\sqrt{3}+3i) - \sqrt{3}(1+i)$	ι) $(i^2-i-1)(i^2-i+1)$

7. Να βρεθούν οι τιμές των α, β , ώστε να είναι συζυγείς οι μιγαδικοί z και w :

i. $z = 5\alpha + 8\beta + (\alpha + 6\beta)i$ και $w = \beta - 3\alpha + 6 + (2\alpha - \beta - 7)i$
ii. $z = \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta + (3\alpha + 2\beta - 1)i$ και $w = \alpha\beta - \alpha - \beta^2 + (3 - \alpha - \beta)i$

8. Να γραφούν στη μορφή $a+bi$ οι μιγαδικοί αριθμοί:

α) $\frac{3-5i}{1+i} + \frac{7-3i}{1-i}$	β) $\frac{21+i}{3+5i} + \frac{11+3i}{1-2i}$	γ)! $\frac{3-2i}{2+3i}$
δ)! $\frac{2+i}{1-2i}$		
ε) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$	στ) $\frac{3-5i}{1+i} + \frac{7-3i}{1-i}$	ζ)! $\frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}$

9. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε την εικόνα και τη διανυσματική ακτίνα των μιγαδικών αριθμών : $2+3i$, $-2-3i$, $-1+i$, -2 , $-i$, $3+2i$, $i-2$, 4 , $2i$.

10. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις :

i. $\operatorname{Re}(z)=2$ iii. $\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=0$

ii. $\operatorname{Im}(z)=-3$ iv. $\operatorname{Im}(z)=-1$ και $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$ $-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$

11. Να γραφούν στη μορφή $\alpha + \beta i$ οι μιγαδικοί αριθμοί:

i. $2-3i+1-i$

iv. $\overline{(2-3i-i+2)} - (1-4i-1)$

ii. $\frac{2+i}{2i}$

iii. $(1-2i) \cdot \overline{(1-2i)}$

12. Να βρείτε τον συζυγή των μιγαδικών:

i. $z_1 = 2+3i$

iii. $z_3 = 2i$

v. $z_5 = \overline{(1-2i)}$

ii. $z_2 = -5i+6$

iv. $z_6 = 0$

vi. $z_4 = 3$

13!. Αν z και w μιγαδικοί αριθμοί και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδειχτούν οι ισότητες :

i. $\operatorname{Re}(-z) = -\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im}(z)$ iv. $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 0$

ii. $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$

v. $\operatorname{Re}(z-\bar{z}) = 0$,

$\operatorname{Im}(z-\bar{z}) = 2\operatorname{Im}(z)$

iii. $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$

vi. $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+z}\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z+z}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{2\operatorname{Re}(z)}$

Β ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι δυνάμεις/αθροίσματα/γινόμενα:

i. $i^{12}, i^{22}, i^{28}, i^{48}, i^{52}$

vi. $i^v + i^{v+1} + i^{v+2} + i^{v+3}$

ii. $i^{228}, i^{270}, i^{333}, i^{383}$

vii. $(1+i^v)(1+i^{2v})$

iii. $i^{549}, i^{1432}, i^{2246}, i^{2959}$

viii. $i^v + i^{v+11} + i^{v+22} + i^{v+33}$

iv. $i^{-69} + i^{73} + i^{89} + i^{-93}$

v. $i^{2012} + i^{-2013} + i^{2014} + i^{-2015} + i^{2016}$

2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$S = 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{v-1}}$$

$$S = \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^6} + \dots + \frac{1}{i^{2v}}$$

$$S = (1+i) + (2-i) + (4-3i) + (8-5i) + \dots + [2^{v-1} - (2v-3)i]$$

3. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τους μιγαδικούς :

i. $(3-i)^6 \cdot (3+i)^6$ ii. $(1-i)^6 - (1+i)^6$ iii. $\left(\frac{4-3i}{1-2i} - 1 - 2i\right)^{12}$

4. Να αποδείξετε ότι : $(3-2i)^{100} - (2+3i)^{100} = 0$

5. Για $\alpha + \beta i \neq 0$ να προσδιορίσετε το θετικό ακέραιο n ώστε να ισχύει

$$(\alpha - \beta i)^n + (\beta + \alpha i)^n = 0$$

6. Να αποδείξετε ότι : i. $(1+i)^{2000} - (1-i)^{2000} = 0$ ii. $(1+i)^{2000n} = (1-i)^{2000n}$

Γ.ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΥΣ ΣΥΖΥΓΕΙΣ

1. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ αποδείξτε ότι είναι πραγματικοί οι αριθμοί:

i. $\frac{\bar{z} + w}{z} + \frac{z + \bar{w}}{z}$ ii. $\frac{z}{w} + \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ iii. $\frac{\bar{z} + w}{1 - zw} + \frac{z + \bar{w}}{1 - zw}$ iv. $\frac{z - i\bar{z}}{z - iz}$
v. $\bar{z}\bar{w} + z\bar{w}$ vi. $z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2$ vii. $\frac{\bar{z}\bar{w}}{z - w} + \frac{\bar{z}\bar{w}}{z - w}$ viii. $(z-i)^2 + (\bar{z}+i)^2$

2. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ αποδείξτε ότι είναι φανταστικοί οι αριθμοί:

i. $\frac{\bar{z} + w}{1 - zw} - \frac{z + \bar{w}}{1 - zw}$ iii. $\frac{\bar{z} + i}{1 + iz} - \frac{z - i}{1 - iz}$
ii. $\left(\frac{z-u}{\bar{z}-u}\right)^2 - \left(\frac{\bar{z}-u}{z-u}\right)^2$ iv. $\bar{z}\bar{w} - \bar{z}\bar{w}$

3. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει $\bar{z}w = 1$ να δείχτεί ότι είναι πραγματικός αριθμός : $u = i \frac{1-zw}{z+w}$.

4. Αν $z \in \mathbb{C}$ i. $w = \frac{\bar{z} - iz}{z - iz}$, να δείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$. ii. $w = \frac{z^3 - \bar{z}^3}{1 + 2z}$, να δείξετε ότι $w \in I$.

5. Έστω z, w μιγαδικοί αριθμοί με : $z \neq w$ και $zw \neq 1$. Να αποδείξετε ότι :

i) αν $\bar{z}\bar{w} \in \mathbb{R}$, τότε ο $\frac{z+w}{z-w} \in \mathbb{R}$

ii) αν $\bar{z}\bar{z} = \bar{w}\bar{w} = 1$, τότε $\frac{w-z}{1-zw} \in \mathbb{R}$ iii) αν $\bar{z}\bar{z} = \bar{w}\bar{w} = 1$, τότε $\frac{z+w}{1-zw} \in I$

6. Έστω ότι για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$.
Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$ ii. $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ iii. $\bar{z}_1\bar{z}_3 + \bar{z}_2\bar{z}_3 = -1$ iv. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Λ.Ε.Ι.Σ.Ω.Σ.Ε.Ι.Σ

1^ο ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\alpha) (5-3i)z + (2-i)(1+3i) = 15+14i - (4-7i)z$ $\beta) (2-i)^2 z + (1+i)^6 = (1-i)^2 z + 12 - 5i$ $\gamma) (3-i)z - (2+i)(3-2i) = (1+2i)z - 9 - 4i$ $\delta) z(1-i) - 1 = i\bar{z}$	$\epsilon) \frac{(5-i)z}{2-3i} - 1 = \frac{(9+13i)z}{3i-1} + 12i$ $\sigma\tau) \frac{z-1}{2z-i} = i-1$ $\zeta) z + \frac{z}{1-i} = (1+i)^3$ $\eta) z^2 + 2\bar{z} + 9 = \bar{z} - z$
--	---

2^ο ΒΑΘΜΟΥ

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\alpha) z^2 - 2z + 5 = 0$ $\beta) z^2 + 2z + 2 = 0$ $\gamma) z^2 - 6z + 13 = 0$ $\delta) z^2 + z + 1 = 0$ $\epsilon) z + \frac{1}{z} = 1$ $\sigma\tau)! z^3 + \frac{1}{z^3} + z + \frac{1}{z} + 2 = 0$	$\zeta) z^2 + 4 = 0$ $\eta) z^2 + 12 = 0$ $\theta) 4z^2 + 3 = 0$ $\iota) z^3 + 1 = 0$ $\iota\alpha) z^2 - 8i = 0$ $\iota\beta) (z-1)^2 + 9 = 0$	$\iota\gamma) (z-1)^2 + (z+2)^2 = 0$ $\iota\delta) z^3 + 2z^2 + 4z = 0$ $\iota\epsilon) z^3 - z^2 + z = 0$ $\iota\sigma\tau) z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$ $\iota\zeta) z^3 + z^2 - 2 = 0$ $\iota\theta) z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
--	--	--

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$\alpha) z^2 + iz + 2 = 0$ $\beta) z^2 - 3iz - 2 = 0$ $\gamma) z^2 - 5iz - 6 = 0$ $\delta) z^2 - 3z + 3 + i = 0$ $\epsilon) z^2 - 5z + 7 - i = 0$	$\sigma\tau) z^2 - (7-2i)z + 13 - i = 0$ $\zeta) (3-i)z^2 - 5z + 7 + i = 0$ $\eta) (1+i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$ $\theta) z^3 + \bar{z} = 0$ $\iota) z^3 - 3\bar{z} = 0$	$\iota\alpha) 7z + 9\bar{z} = 48 + 10i$ $\iota\beta) z^2 - 4\bar{z} + 4 = 0$ $\iota\gamma) z^2 = 23 - 6\bar{z}$ $\iota\delta) z^2 - z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 50(i-1)$ $\iota\epsilon) \frac{z + z\bar{z}}{z - z\bar{z}} = \frac{z+1}{z+1}$
---	--	---

Ε.ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

4. Δίνεται η εξίσωση : $z^2 + \lambda z + \lambda = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες.
5. Δίνεται η εξίσωση : $z^2 + (\lambda - 2)z + \lambda^2 + 2 = 0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες. Αν για τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης ισχύει $z_1^2 + z_2^2 = 4$ να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και τις ρίζες z_1, z_2 .
6. Αν η εξίσωση $z^2 - \kappa z + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ έχει ρίζα τον $2+i$ να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$. (υπουργείο)
7. Η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $z_1 = 2 - i$.
α) Να βρείτε την άλλη ρίζα β) Να βρείτε τα a, β .
8. Να βρεθεί η εξίσωση ,δευτέρου βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές που έχει ρίζα τον μιγαδικό $z=2-i$.

ΣΤ.ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:
 - i. $2+3i$, $3-2i$, $1+\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$
 - ii. $\frac{3+4i}{1-2i}$, $\frac{10i}{\sqrt{3}-i}$, $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i}$, $\frac{2-4i}{8i-6}$
 - iii. $(-2i^3)^4$, $(2+3i)^2 - (3-2i)^2$, $\left(\frac{4+6i}{2-3i}\right)^4$, $(-4-3i)^4 \cdot (1-i)^6$
2. Να βρεθούν το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z :
 - i. $(2-i)z - 3 = (1-i)z + 4i$
 - ii. $(3-i)z + 1 = (1+2i)z - 5i$
 - iii. $(3-i)z + 10 = (2+i)z - 20i$
 - iv. $625z = (2+i)^8 + (1-2i)^8$
 - v. $\frac{2}{z} = \frac{1-i}{3+4i} + \frac{1}{1+7i}$
 - vi. $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{2-i}$
3. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z όταν ισχύουν οι ισότητες:
 - i. $|z-18| = 3|z-2|$
 - ii. $|z-2| = |2z-1|$
 - iii. $|z+2i| = |2z+i|$
 - v. $|z+9+3i| = |3z+3+i|$
 - vi. $|3z+6+4i| = |6z+3+2i|$
 - vii. $32(z-3)^5 = (4z-3)^5$
4. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $|2z+1|$, $z \in \mathbb{C}$, αν ισχύει $|6z+1| = |4z-1|$
5. Αν $|z-10| = 3|z-2|$, να βρείτε το $|z-1|$. Αν $|2z+7| = |3z+13|$, να βρείτε το $|z+5|$
6. Αν $|z|=1$, τότε $|z-\bar{z}+2i| + |z-\bar{z}-2i| = 4$. Αν $|z+2i| = |2\bar{z}-i|$, τότε $|z|=1$

7. Να αποδείξετε ότι :

i. $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$ ii. $|z + w| = |z - w| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$

8. Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός όταν ισχύει :

i. $|z| = |z - 8i| = |z - 3 + i|$ iv. $|z - 3 + i| = |z + 1 + i| = \sqrt{13}$
 ii. $|z - 6| = |z - 2i| = |z - 18i|$ v. $|z| = \sqrt{34}$ και $|z - 1| = |z + 2 - 3i|$
 iii. $|z + 4| = |z - 2i| = |z + 4 - 6i|$ vi. $|z - 2 + 3i| = \sqrt{13}$ και $|z - 2 + 5i| = 5$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $|z|^2 - 2z + 2i = 0$ vi. $z^2 - 2z + |z| = -2$ xi. $z^2 - 4|z| + 3 = 0$
 ii. $|z|^2 - 2z - 4 + 2i = 0$ vii. $|z|^2 - 3z + 2\bar{z} = 21 + 15i$ xii. $z + |z + 1| + i = 0$
 iii. $|z + 1| - 2z = 1 + 8i$ viii. $|z|^2 - 6iz + |z| = 30$ xiii. $z^2 + |z| = 0$
 iv. $|z^2| = -z^2$ ix. $|z - i| = 2\bar{z}$ xiv. $|z + i| = iz$

Ζ.ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΕΤΡΑ

1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες:

i. $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in I$ ii. $|z - 3| = |z + 3| \Leftrightarrow z \in I$ iii. $|u| = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{z} - uz}{1 - u} \in \mathbb{R}$
 iv. $|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{z - w}{z + w} \in I$ v. $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \frac{z + u}{1 + zu}$ vi. $|z| = |u| = 1 \Rightarrow \frac{z^2 + u^2}{1 + zu}$

2. Έστω $\rho > 0$ και μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 τέτοιοι ώστε : $z_1 + z_2 + z_3 = \rho$ και

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$

Να αποδείξετε ότι : i. $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = \frac{1}{\rho}$ ii. $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \rho^2$

3. Έστω ότι για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει : $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ και

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 1$ ii. $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 1$ iii. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_3|^2 = 4$

4. Δείξτε ότι η εξίσωση: $(z + 1)^{2v} + (z - 1)^{2v} = 0$ $v \in \mathbb{N}^*$, έχει μόνο φανταστικές ρίζες.

5. Αν η εξίσωση $(iz - 2)^v = w(z + 2i)^v$, $v \in \mathbb{N}^*$, με άγνωστο τον z , έχει πραγματική ρίζα, να δείξετε ότι: $|w| = 1$.

6. Αν για τον μιγαδικό $z \neq 0$, ισχύει: $z^{11} = \bar{z}^7$, να αποδείξετε ότι $z^{18} = 1$.

7. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $(1 - iz)^v = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$.

8. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν οι σχέσεις: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ να αποδείξετε ότι :
- i. $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ ii. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου .
9. Αν ο μιγαδικός z που ικανοποιεί την σχέση $(1+iz)^7 = (z+i)^5$, να δείξετε ότι $z \notin \mathbb{R}$.

Η.ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα συστήματα:

- i. $\begin{cases} |z-1+3i| = |z-1+5i| \\ |z-3+i| = |z-1+i| \end{cases}$ ii. $\begin{cases} |z-2-3i| = |z-2+i| \\ |z-5-2i| = |z+1-2i| \end{cases}$ iii. $\begin{cases} |z-2| = |z-2-2i| \\ |z-2+i| = |z-1| \end{cases}$
- iv. $\begin{cases} |z-3i| = |z-5i| \\ |z-5-4i| = 2 \end{cases}$ v. $\begin{cases} |z+2+4i| = |z+2+2i| \\ |z-3+3i| = 2 \end{cases}$

Θ.ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΡΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει: $\|z+i\| + \|z-i\| \geq 2$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει:
- i. $|z|^2 + |w|^2 \geq \bar{z}w + z\bar{w}$ ii. $|z|^2 + |w|^2 + \bar{z}w + z\bar{w} \geq 0$
3. Για κάθε $z, u \in \mathbb{C}$ να δειχτεί ότι ισχύει η ανισότητα: $|z| + |u| \leq |z+u| + |z-u|$.
4. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $3|z+5| > |z-3|$ να δειχτεί ότι είναι: $|z+6| > 3$.
5. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύουν $|z-2| = 1$ και $|z-4| \leq 2$ να δειχτεί ότι:
- $$\sqrt{6} \leq |z| \leq 6$$

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

1. Αν για δύο μιγαδικούς z, w ισχύουν: $|z-w| = 6$ και $|z+w| = 10$ να αποδείξετε ότι:
- i. $2 \leq |z| \leq 8$ ii. $6 \leq |z-i| + |w-i| \leq 18$ iii. $\frac{1}{4} \leq \left| \frac{z}{w} \right| \leq 4$ iv. $8 \leq |z+w-2i| \leq 12$
2. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z-3+4i| = 1$ να αποδείξετε ότι:
- i. $4 \leq |z| \leq 6$ ii. $9 \leq |z-9-4i| \leq 11$
3. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $\|z-2\|-5 \leq 1$ να αποδείξετε ότι: $2 \leq |z| \leq 8$
4. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z| = 1$ να αποδείξετε ότι: $4 \leq |z-3+4i| \leq 6$
5. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z+1+i| = 3$ να αποδείξετε ότι: $2 \leq |z-3+4i| \leq 8$.
6. Αν για δύο μιγαδικούς z, w ισχύουν: $|z-3i| = 1$ και $|w-4| = 2$ να αποδείξετε ότι :
- $$2 \leq |z-w| \leq 8.$$

7. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει :

i. $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geq 3|z|$ ii. $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geq 3$

8. Να αποδειχτεί στο $\mathbb{C}$ η ανισότητα : $|z + 3| + |z + 4| \leq |z + 2| + |z + 5|$.

9. Για κάθε $z, u \in \mathbb{C}$ να δειχτεί: i. $|1 - zu| \geq 1 - |z| \cdot |u|$ ii. $z\bar{u} + u\bar{z} \leq 2|zu|$

10. Να αποδειχτούν οι συνεπαγωγές :

i. $|z - 3| \leq 2 \Rightarrow 4 \leq |z + 3| \leq 8$ iv. $|z - \sqrt{3}i| \leq 5 \Rightarrow 3 \leq |z - 1| \leq 7$

ii. $|2z - 3| \leq 5 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 4$ v. $|z - 1 + 2i| \leq 3 \Rightarrow 2 \leq |z + 2 - 2i| \leq 8$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς $z, u, x, y \in \mathbb{C}$ με $xy \neq 0$ και $|x| + |y| < 1$ να δειχτεί ότι :

$$\left| \frac{z}{x} + \frac{u}{y} \right| > |z + u|$$

2. Αν για τους μιγαδικούς z, u ισχύουν $|z| < 1$ και $|u| < 1$ να δειχτεί ότι : $|z - u| < |1 - \bar{z}u|$

3. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να δειχτεί ότι : $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ και $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Για το μιγαδικό αριθμό $z \neq i$ να αποδειχθεί η ισοδυναμία $\operatorname{Im}(z) \leq 0 \Leftrightarrow |z + i| \leq |iz + 1|$

Ι.ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

	ΕΞΙΣΩΣΗ	ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΕΥΘΕΙΑ	$y = \lambda x + \beta$ $y - y_o = \lambda(x - x_o)$ $x = x_o, y = y_o$ $y = x, y = -x$		
ΚΥΚΛΟΣ	$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \rho^2$	$K(x_o, y_o)$	
	$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$	$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$	$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	$y^2 = 2px$	$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	
ΕΛΛΕΙΨΗ	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$	$a^2 = b^2 + \gamma^2$
ΥΠΕΡΒΟΛΗ	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$	$\gamma^2 = a^2 + b^2$

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΜΕ ΣΥΖΥΓΕΙΣ

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας, $M(z)$, όταν :
 - i. $(z + \bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2 = 3 + z\bar{z}$
 - ii. $(z + i\bar{z}) \in \mathbb{R}$
2. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w . Να βρείτε που κινείται η εικόνα του μιγαδικού z όταν:
 - i. $\operatorname{Re}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = 1$
 - ii. $\operatorname{Re}\left(\frac{z+2}{z}\right) = \frac{1+2\operatorname{Re}(z)}{z \cdot \bar{z}}$
3. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει : $\frac{i+z}{1+z} = \frac{\overline{i+z}}{1+\bar{z}}$. Να αποδείξετε ότι η $M(z)$ ανήκει στην ευθεία : $x+y+1=0$.
4. Έστω ο μιγαδικός $z = \lambda - 1 + (\lambda - 2)i$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z .
 - ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w = \frac{2z}{1-i}$.
 - iii. Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή των αξόνων.
5. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει η σχέση :
 - i. $\bar{z} + z + \bar{z} = 3$
 - ii. $z^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 = 12$
 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας $M(z)$
6. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $M(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο των αριθμών z , για τους οποίους ισχύει : $\operatorname{Re}\left(\bar{z} + \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}(z) + \frac{1}{2}$.
7. Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 1$, να βρείτε που βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού $w = iz - (1-i)\bar{z} - i$. Να βρείτε το μιγαδικό w που έχει την πλησιέστερη εικόνα στην αρχή των αξόνων.
8. Έστω M και N εικόνες των μιγαδικών z και w αντίστοιχα. Αν $w = \bar{z} - \frac{2}{z}$ και το M κινείται στο μοναδιαίο κύκλο, να βρείτε την εξίσωση της γραμμής που κινείται το w .
9. Να αποδείξετε ότι τα x, y ικανοποιούν την εξίσωση της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$, αν και μόνο αν, ο z ικανοποιεί την $z^2 + \bar{z}^2 = 2$, όπου $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.
10. Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$.

2. ΜΕ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας, $M(z)$, όταν:

- | | |
|--|--|
| i. $z=3\lambda-2i(4-\lambda)$ | iv. $z=(\lambda+2i)^2$ |
| ii. $x+(y-2\lambda^2)i=\lambda(1+i)-3+i$ | v. $z=1-\sin\theta+i\eta\mu\theta$ |
| iii. $z=\frac{\lambda+1}{\lambda+i}$ | vi. $z=1-\sin\theta+i(2+\eta\mu\theta)i$ |

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των ριζών των εξισώσεων:

- | | |
|----------------------------------|---|
| i. $z^2 - 2\sin\theta z + 1 = 0$ | ii. $z^2 - 4\sin\theta z + 3\sin^2\theta + 1 = 0$ |
|----------------------------------|---|

3.ΚΥΚΛΟΣ Ή ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| i. $ z-3i =2$ | v. $ 2z-3+i =2\sqrt{2}$ |
| ii. $ z+1-2i =\sqrt{3}$ | vi. $ z+2-4i ^2 + z-6i ^2 = 12$ |
| iii. $ 3+5i+z =1$ | vii. $ 3z+2-i =3$ |
| iv. $ -z+3i-2 =\sqrt{2}$ | viii. $ z+3-4i ^2 + z-1+2i ^2 = 34$ |

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------|
| i. $ z-3+2i =2, z=2x+(2y-1)i$ | iii. $ -2-6i+z =1, z=2x+3yi$ |
| ii. $ z-1+3i =3\sqrt{2}, z=3x-1+3yi$ | iv. $ z-1 =4, z=2x-1+yi$ |

4.ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| i. $ z-2+3i =4, w=z-3+2i$ | vi. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2, w=z+1-5i$ |
| ii. $ z-1-i =\sqrt{2}, w=z+2-3i$ | |
| iii. $ z-i =3, w=z+2i-1$ | vii. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4, w=z-1+i$ |
| iv. $ z-3-i =3, w=2z+i-1$ | |
| v. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9, w=z-3+2i$ | viii. $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 25, w=-z+2+3i$ |

5. ΜΕ ΣΥΖΥΓΗ

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|--------------------------------|--|
| i. $(3-i)\bar{z} + (3+i)z = 4$ | iv. $z\bar{z} + 1 = z^2 + \bar{z}^2$ |
| ii. $z^2 - \bar{z}^2 = 8i$ | v. $z\bar{z} = 2(z + \bar{z}) - 4(z - \bar{z})i$ |
| iii. $z + \bar{z} - z ^2 = 0$ | vi. $z\bar{z} - 2(z - \bar{z}) = 4(1-i)\text{Im}(z)$ |

6. ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΕΤΡΩΝ

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| i. $ z+2+4i = z+4-2i $ | iv. $ z-1+2i = z-3+4i $ |
| ii. $ z-2+6i = z+4i $ | v. $ 3z+1-2i = 3z-2+i $ |
| iii. $ z+3-i = z+2+5i $ | vi. $ 2z-3+i = 2z+1-3i $ |

7. ΕΛΛΕΙΨΗ-ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| i. $ z-3 + z+3 = 10$ | iv. $ z-5 - z+5 = 8$ |
| ii. $ z-6 + z+6 = 20$ | v. $ z-5 - z+5 = 6$ |
| iii. $ z-8 + z+8 = 20$ | vi. $ z-5i - z+5i = 6$ |

8. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- i. $w = (z+i)(\bar{z}-i) \in I$ ii. $w = \frac{z-i}{z-1} \in I$ iii. $w = \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$ iv. $w = \frac{z+i}{iz+1} \in \mathbb{R}$

9. ΣΥΝΘΕΤΟΣ Γ. ΤΟΠΟΣ

Αν ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $P(z)$ είναι η γραμμή C να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(w)$ όταν :

- | | |
|---|---|
| i. $w = z-3+5i, C: x+2y+3=0$ | iv. $w = \frac{z-2+i}{1-i}, C: (x+4)^2 + (y-3)^2 = 8$ |
| ii. $w = \frac{z-1+2i}{2+i}, C: 2x+3y+7=0$ | v. $w = z-2+3i, C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ |
| iii. $w = z-3+5i, C: (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$ | |

10. ΣΧΕΣΗ ΜΕ $\operatorname{Re}(z)$ Ή $\operatorname{Im}(z)$

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| i. $\operatorname{Re}(z+\bar{z})=3$ | iii. $\operatorname{Re}(z+1)^2=2[\operatorname{Re}(z)+1]$ |
| ii. $\operatorname{Re}(z^2-1)=0$ | iv. $2\operatorname{Re}(z)+2\operatorname{Im}(\bar{z})= z ^2$ |

11. ΑΝΙΣΟΤΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Αν $z=x+yi$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ όταν:

- | | | |
|------------------------|---------------------|--|
| i. $ z-1 <2$ | vi. $ 2z-1+4i <6$ | xi. $ z+\bar{z} <2$ |
| ii. $ z+3 >4$ | vii. $ iz-2+3i >1$ | xii. $ z-\bar{z} <2$ |
| iii. $ z+2i >\sqrt{2}$ | viii. $ z-1 < z-2 $ | xiii. $\operatorname{Im}(iz)>2\operatorname{Re}(iz)+3$ |
| iv. $ z-i <\sqrt{3}$ | ix. $ z-i > z+1 $ | |
| v. $ z+2-3i >3$ | x. $ z-1+2i > z+i $ | |

ΙΑ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω ο μιγαδικός z και η συνάρτηση $f(z)=\frac{z^3-i}{z+i}, z \neq -i$.

α) Να δείξετε ότι $f(z)=z^2-iz-1$.

β) Αν η εξίσωση $f(z)=(\alpha-i)z-\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2-3i$ να βρείτε τα α, β .

γ) Αν $|z|=1$, να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $\rho=3$.

2. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $f(z)=\frac{z^3-i}{z+i}, z \neq -i$.

α) Να δείξετε ότι $f(z)=z^2-iz-1$.

β) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $z \in I$ ή $2\operatorname{Im}(z)=1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(z)=-\frac{z}{i}$.

δ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών z , βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι οι εικόνες του των μιγαδικών $f(z)$ δεν είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $\rho=3$.

3. Έστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $f(z) = \frac{2z-1}{z^2}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{1}{z}\right) = 2$

β) Να δείξετε ότι $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $\operatorname{Re}(z) = |z|^2$.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $f\left(\frac{1}{z}\right) = 2$ δεν είναι σημεία του C .

4. Έστω ο μιγαδικός z με $z \neq 2i$ και η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2 + 4}{|z - 2i|}$.

α) Να βρείτε το $\operatorname{Im}(f(1+i))$.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων z στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $|f(z)| = |z + 2i|$.

δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει: $|f(z - 5i)| + |f(z + i)| = 10$.

5. Έστω οι μιγαδικοί $z \in \mathbb{C}^*$ και $f(z) = \frac{z-i}{z}$.

α) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $z \in I$.

β) Αν $f(z) \cdot \overline{f(z)} = 5$, να βρείτε: i. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z

ii. τη μέγιστη τιμή του $|z|$ και την ελάχιστη του $|f(z) - 1|$

6. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, με $z \neq -1$ και $z \neq 0$.

α) Να γράψετε τον $f(i)$ στη μορφή $a+bi$ και στη συνέχεια να βρείτε και το μέτρο του.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Για $z_1, z_2 \neq -1$ με $f(z_1) = f(z_2)$, ισχύει $z_1 = z_2$.

ii. Αν $f(z) = f(\bar{z})$, τότε ο z είναι πραγματικός αριθμός.

iii. $f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z)$.

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τις οποίες ισχύει:

i. $|f(\bar{z})| = |f(2i)|$ ii. $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

7. Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{|z-i|+|\bar{z}+i|}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \neq i$ ισχύει: $|f(z)| = f(z)$.

β) Αν $f^2(z) - f(z) = 0$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z .

γ) Να αποδείξετε ότι: $\overline{f(z)} = f(-\bar{z})$.

8. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f(z) = \frac{zi}{|z-i| - |z+i|}$.

α) Να βρείτε για ποιους μιγαδικούς z ορίζεται $f(z)$. β) Να αποδείξετε ότι: $|f(z)| \geq \frac{1}{2}$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|f(z)| = |z|$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(z) = \frac{|z|+i}{|z|-i}$, $z \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)} \quad \beta) f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{f(z)} \quad \gamma) f(f(z)) = i$$

ΙΒ. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

1. Με δεδομένο ότι οι μιγαδικοί αριθμοί παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία, αντίστοιχα και το μέτρο της διαφοράς των την απόσταση των δύο σημείων να ερμηνευτούν γεωμετρικά οι παραστάσεις:

- | | | |
|---------------|-----------------------|---|
| i. $ z $ | viii. $ z-2 = z-6 $ | xv. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ |
| ii. $ z-2 $ | ix. $ z = 3$ | xvi. $\operatorname{Re}(z) = 2$ |
| iii. $ z+2 $ | x. $ 2z-1 = z-6i $ | xvii. $\operatorname{Im}(z) = 3$ |
| iv. $ z-3i $ | xi. $ z+i = 4$ | xviii. $\operatorname{Re}(z) < 4$ |
| v. $ z+3+5i $ | xii. $ z-3+2i = 2$ | ixx. $\operatorname{Im}(z) > -2$ |

2. Αν $M(z)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB με άκρα $A(z_1)$ και $B(z_2)$

να δείχτεί ότι: $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

3. Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$ όταν οι κορυφές A, B, Γ

είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = \frac{22+4i}{1-i}$, $z_2 = \frac{-2+6i}{1+i}$, $z_3 = -2+6i$

αντίστοιχα.

4. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(u)$, $B(w)$ όπου $u = 2z_1 + 3z_2$ και $w = z_1 - z_2$ όταν $z_1 = \frac{20}{2-i}$ και $z_2 = \frac{-4+18i}{1+i}$.
5. Δίνονται τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y-5=0$. Αν $z_1 = 2+3i$ και $z_2 = 1+4i$ να βρεθεί σημείο $M(z)$ πάνω στην ευθεία ε ώστε η γωνία $\widehat{MAB}$ να είναι ορθή.
6. Για τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$, $\Delta(z_4)$ ναδειχτεί ότι :
- $$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{R} \text{ και } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in I$$
7. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ είναι συνευθειακά
- i. όταν και μόνο όταν $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$. ii. $z_1 = 1-6i, z_2 = -2-9i, z_3 = 6-i$.
8. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί : $z_1 = \frac{4-2i}{1-i}$, $z_2 = \frac{6+2i}{1-3i}$, $z_3 = \frac{2-6i}{2-i}$. Ναδειχτεί ότι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ σχηματίζουν ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.
9. Αν τα σημεία $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -1-2i$ και $z_3 = -2\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ ναδειχτεί ότι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.
10. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύουν οι ισότητες : $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ τότε το τρίγωνο των αντιστοίχων σημείων τους είναι ισόπλευρο τρίγωνο.
11. Αν $z_1 = 2+i$, $z_2 = 6+3i$, $z_3 = 8+7i$, $z_4 = 4+5i$ ναδειχτεί ότι τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$, $\Delta(z_4)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
12. Αν $z = (2\kappa + \lambda) + (3\kappa - \lambda)i$ να βρεθούν οι παράμετροι κ, λ ώστε το σημείο $A(z)$ να είναι τομή των ευθειών $\varepsilon_1: 5x - 2y - 11 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x - 3y - 6 = 0$.
13. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{z-z} \in \mathbb{R}$ ναδειχτεί ότι τα σημεία των $1, -1, z$ και $\bar{z}$ είναι ομοκυκλικά.
14. Αν z ανήκει στον κύκλο $|z|=1$ τότε $\operatorname{Re}(z^2 - 4z + 3) \geq 0$.
15. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ όπου $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 3-4i$ και $z_3 = 1-4i$.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ

Ι ΘΕΩΡΙΑ

➤ Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
2. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
3. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, |z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$, όπου $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$.
4. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
5. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
6. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.
7. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
8. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
9. Αν z μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
10. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.
11. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2|$.
12. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει: $|z|^n = |z^n|$.
13. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $az^2 + bz + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.
14. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.
15. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
16. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $(\bar{z}^n) = (\bar{z})^n$.
17. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
18. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
19. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.
20. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε z^{-1} .
21. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\beta i$.
22. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $(z^n)^{-1} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$.

23. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $a+bi$ και $c+di$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
24. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$.
25. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.
26. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$
27. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.
28. Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$.
29. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\|z_1 - z_2\| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
30. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $a+bi$ και $c+di$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
31. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:
- α. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ β. $|z^2| = z^2$ γ. $|z| = -|\bar{z}|$ δ. $|z| = |\bar{z}|$ ε. $|i\bar{z}| = |z|$

28. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $- \bar{z}_1 $	δ. 5
5. $ i \cdot z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Η ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B.1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z + 16| = 4|z + 1|$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B.2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $|z - 1| = |z - i|$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B.3. Να μετατρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων B.1. και B.2. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε : $w = \frac{z - 3i}{1 + i}$

B.1. Αν $w = 2 - 2i$ τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι Α. 3 Β. 4 Γ. 5 Δ. 2 .Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

B.2. Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανηκεί σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07,5**

B.3. Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι : $\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2002

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Γ. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2}$ όπου z

συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$.

Γ.1. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

Γ.2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f αν ισχύει $|z + 1| > |z - 1|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

Γ.3. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f . **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ 2002

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $Z_1 = 1 - 2i$ και $Z_2 = 3 + 4i$

α) Αν $\frac{Z_2}{Z_1} = x + yi, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι η $\frac{Z_2}{Z_1}$, να βρείτε

τις τιμές των β και γ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους

οποίους ισχύει $|z - 2Z_1| = |Z_2|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$ $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Β. α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών

αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) ,

τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο

τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 13

ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = \left| f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \right|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

β) Αν $f(z) = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού

z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2004

Δ. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} \left| z f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \right| \geq 0,$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g' .

ΜΟΝΑΔΕΣ 05

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και

$|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$. Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι :

α. $|z| = 1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 11** β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ. Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης: $K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 05

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2005

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Β. α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + 4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2 . **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν

$$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $Z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{Z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2}, k \in \mathbb{R} - \{1\}$ Να αποδείξετε ότι για

κάθε $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $\text{Im}(w) = -1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2006

Γ. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί Z_1, Z_2, Z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i) $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

ii) $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των Z_1, Z_2, Z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί Z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - Z)^{10} = Z^{10}$

και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + a, a \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών Z ανήκουν στην ευθεία $\chi = 2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 07

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $X=2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0 = -3$, τότε

i) Να βρείτε το a και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της εφαπτομένης (ε), του άξονα $\chi'\chi$ και της ευθείας

$$x = \frac{3}{5}.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

Β. Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$

α) Να δείξετε ότι: $|5z - 1| = |z - 5|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 05

β) Να δείξετε ότι: $|z| = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

γ) Αν $w = 5z + 1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2007

Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ με $a \in \mathbb{R}$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού Z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

β. Έστω Z_1, Z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ για κάθε $a=0$

και $a=2$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών

Z_1, Z_2

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

γ) Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2v} = (-z_2)^v$ για κάθε φυσικό αριθμό v . **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + z_1}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$.

Δίνεται επίσης ότι

$$z_2 - z_1 \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί

$$\text{ότι } (z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $Z_1 = i$, $Z_2 = 1$ και $Z_3 = 1 + i$.

α. Να αποδείξετε ότι: $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = |Z_3|^2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

β. Αν για το μιγαδικό Z ισχύει $|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$ τότε να αποδείξετε ότι:

ί. $\operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Im}(Z)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

Β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6$ και

$$|w - (1 - i)| = |w - (1 + i)| = |w - (3 - 3i)| \text{ τότε να βρείτε:}$$

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Β. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$,

όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

B.2. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

B.3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$

ΜΟΝΑΔΕΣ 07

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k + 1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=x+1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

B. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1-i)\beta - (1+i)\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2009

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

B. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό Z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό Z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

γ. Για τους αριθμούς Z_1, Z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 40$

ΜΟΝΑΔΕΣ 07

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

B. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$

B.1. Να αποδείξετε ότι : $-\bar{z} = -1+i$, $z^2=2i$, $z^3=-2+2i$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B.2. Αν Α,Β,Γ οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$ αντίστοιχα ,να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B.3. Να αποδείξετε ότι : $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}| + |z^3 + \bar{z}|^2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3 \leq w \leq 7$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B. Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β2 να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος Β2 με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$ να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

B. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει : $|z| = |z - 2i|$

B.1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B.2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς z , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

B.3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2011

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + \left| \frac{1}{z + 3i} \right| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B2. Να αποδείξετε ότι $|z - 3i| = \frac{1}{z - 3i}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 04**

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1) \quad w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , w με $z = w$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ , έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

B. Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

B.1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $w = 2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B.2. Αν $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα **B.1.** τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B.3. Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B.4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός. **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z_1 - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$ (1) και $|w - 5\bar{w}| = 12$ (2).

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = 2$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

B1. $z = 1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός. **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B3. $(z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$,

$w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 06

ΟΜΟΓΕΝΩΝ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει : $|iz - 1| = 1$

B.1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B.2. Για τους παραπάνω μιγαδικούς z να αποδείξετε ότι : $|z| \leq 2$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B.3. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και A, B

οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB , όπου

$K(0,-1)$, είναι ορθογώνιο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2013

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $(z-2)(\bar{z}+2) + |z-2| = 2$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό

τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\beta = -4$ και $\gamma = 5$

ΜΟΝΑΔΕΣ 09

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a_0, a_1, a_2 οι οποίοι ανήκουν στον

γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη

σχέση: $v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $v < 4$

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2z, x \in \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$

B.1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό

επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς

επίσης ότι γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος

με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

ΜΟΝΑΔΕΣ 08

B.2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. **ΜΟΝΑΔΕΣ 05**

B.3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι: $|z - w| \leq 10$ και $|z + w| \leq 10$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

B.4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει: $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 06**

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, εκτός από ένα σημείο του (μονάδες 7). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B2. Αν z_1, z_2 , z είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος B1, να αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει: $|z| = \sqrt{5}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

B. Δίνεται η εξίσωση $2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0$, $z \in \mathbb{C}$

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B2. Αν $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να

αποδείξετε ότι ο αριθμός είναι $w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$ ίσος με $-3i$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει όπου $1 \leq w, z, \bar{z}$ οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2. **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

• $w = \frac{2z-i}{2z+i}, z \neq -\frac{i}{2}$ • w φανταστικός

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1/2$, εκτός από το σημείο $M(0, -1/2)$ του κύκλου. **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z , του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B3. Αν είναι $z = \frac{1}{2}$ τότε να αποδείξετε ότι $w^4 + iw^7 = 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $|z + 4| = 2|z + 1|$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 09**

B2. Αν z_1 ο πραγματικός αριθμός με $\text{Re}(z) > 0$ και z_2 ο φανταστικός αριθμός με $\text{Im}(z_2) < 0$ z είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος **B1**, τότε να αποδείξετε ότι: $z_1 = 2$ και $z_2 = -2i$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

B3. Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 08**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2015

B. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $|z - 4| = 2|z - 1|$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B1**. Να αποδείξετε ότι :

α. ο w είναι πραγματικός και **ΜΟΝΑΔΕΣ 04**

β. $-4 \leq w \leq 4$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

B3. Αν w , όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος **B2**, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 με $z_3 = 2iz_1$ είναι ισοσκελές. **ΜΟΝΑΔΕΣ 07**

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Α.1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ στο $x_0 = 2$.

6. $f(x) = \eta\mu(x\sqrt{x})$ στο $x_0 = 0$.

2. $g(x) = \sqrt{x-1}$ στο $x_0 = 1$.

7. $f(x) = \sqrt{3x-x^2}$ στο $x_0 = 3$.

3. $h(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ στο $x_0 = 2$.

8. $g(x) = \sqrt{x} + x$ στο $x_0 = 0$.

4. $f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$ στο $x_0 = 1$.

9. $g(x) = \sqrt{1-\sin 2x}$ στο $x_0 = 0$.

5. $f(x) = 1 - \sin x + 3\eta\mu|x|$ στο $x_0 = 0$.

10. $h(x) = \sqrt{x-2} + 3x - 1$ στο $x_0 = 2$.

2. Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + 3, & x < 1 \end{cases}$

στο $x_0 = 1$

7. $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(x-1), & x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} - 2, & 1 < x \end{cases}$

στο $x_0 = 1$

2. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{2x+7} - 3, & 1 < x \end{cases}$

στο $x_0 = 1$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 5, & x \leq -2 \\ 3x^2 + 5x + 3, & x > -2 \end{cases}$

στο $x_0 = -2$

3. $h(x) = \begin{cases} 2^x(x-2) + 4x - 2, & x \leq 2 \\ 2^x(2x-4) + 6, & 2 < x \end{cases}$

στο $x_0 = 2$

9. $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ στο

$x_0 = 0$

4. $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x \leq 1 \\ 2x^2, & x < 1 \end{cases}$

στο $x_0 = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \eta\mu x, & x = 0 \end{cases}$

στο $x_0 = 0$

5. $f(x) = \begin{cases} x \ln x + x - e \ln x, & x \leq e \\ 2x \ln x - 2e \ln x + e, & e < x \end{cases}$

στο $x_0 = e$ 8.

6. $h(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$

στο $x_0 = 0$

3. Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο των συναρτήσεων:

a. $f(x) = |2-x| + 3x$
στο $x=2$

b. $f(x) = 2|x-3| - 2x + 1$
στο $x=2$

c. $g(x) = x^2 - |x-1| + 2$
στο $x=2$

d. $g(x) = x^2 - |x-1| + 2$
στο $x=1$

e. $h(x) = 2|x| - |x-5| + x$
στο $x=1$

f. $h(x) = |x-1| - |x-2| + 3x$
στο $x=3$

g. $h(x) = |x^2 - 4x + 3| - |x-4| + 2x$
στο $x=2$

h. $f(x) = |x| + |x^2 - 2x - 3| + x + 1$
στο $x=2$

i. $f(x) = |x| + |x^2 - 2x - 3| + x + 1$
στο $x=0$

j. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
στο $x=0$

k. $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ στο $x=0$

l. $g(x) = (x-3)^2 |x-3|$
στο $x=3$

m. $h(x) = (\sqrt{x} - 2)|x-4|$
στο $x=4$

Α.2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

1. Να βρεθούν οι παράμετροι ώστε οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες:

i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x - 1, & x \leq 1 \\ \alpha x^2, & 1 < x \end{cases}$
στο $x=1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 4, & 1 < x \end{cases}$
στο $x_0 = 1$

ii. $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 5, & 1 < x \end{cases}$
στο $x=1$

iv. $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \eta \mu x, & x \leq 0 \\ x^2 + \beta x, & 0 < x \end{cases}$
στο $x_0 = 0$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x, & x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 - \alpha x + 4, & 2 < x \end{cases}$
στο $x=2$

vi. $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \eta \mu x, & x < 0 \\ \beta x - \varepsilon \varphi x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
στο $x_0 = 0$

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (\sqrt{x^2 + 3} - 2)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2\eta\mu x}{x} = 5$ να αποδείξετε ότι $f'(0) = 3$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - x} = 2$ να δείξετε ότι $g(x) = f(x)\ln(ex)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.
4. Αν $f(x) = \begin{cases} g(x)\eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ και $g(0) = g'(0) = 0$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
5. Έστω η συνάρτηση f με $f(1) = 1$ και $f'(1) = 2$ και η $g(x) = \begin{cases} f^3(x) & , x \leq 1 \\ \alpha x^2 + \beta & , x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β ώστε η g είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Γ. ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2x - 3x^2 \leq f(x) \leq 2x + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2x^2 + 5x + 3 \leq f(x) \leq 3x^2 + 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να βρείτε την $f'(1)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $10x - x^2 - 10 \leq f(x) \leq x^2 - 10x + 40$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 5 και να βρείτε την $f'(5)$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - \eta\mu x| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$.