ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $5^{ο}$-ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ--ΤΡΑΠΕΖΙΑ

➢ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Οι απέναντι πλευρές παράλληλες
2. Οι απέναντι πλευρές ίσες
3. Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
4. Οι απέναντι γωνίες ίσες .
5. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται στο κέντρο Ο(μέσο) (ΑΟ=ΟΓ και ΒΟ=ΟΔ)

✖ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{B} = \widehat{\Delta}$
2. $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^{o}$ (συνεχόμενες γωνίες παραπληρωματικές)
3. $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_2$

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

➢ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Οι διαγώνιοι είναι ίσες. Δηλαδή ΑΓ=ΒΔ
2. Έχει μία ορθή

✖ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. ΑΓ=ΒΔ $\Rightarrow$ ΑΟ=ΟΓ=ΟΒ=ΟΔ
2. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες και μάλιστα όλες 90^{o}
3. Σχηματίζονται 4 ισοσκελή τρίγωνα ανά δύο ίσα μεταξύ τους.

- **ΡΟΜΒΟΣ**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.
2. Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.
3. Έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Η μία διαγώνιος είναι η μεσοκάθετος της άλλης
2. $\widehat{A}=\widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_2$
4\. Όλες οι πλευρές του ίσες.
3\. Σχηματίζονται 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα.

- **ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**

1. Έχει όλες τις ιδιότητες όλων των παραπάνω σχημάτων…Όλα ίσα μεταξύ τους

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

- **ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ**

Για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο πρέπει να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. Οι απέναντι πλευρές παράλληλες
2. Οι απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες
3. Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
4. Οι απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες .
5. Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

- **ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ**

Για να είναι ένα παραλληλόγραμμο ορθογώνιο πρέπει να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. Είναι παραλληλόγραμμο +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ……………………
2. Είναι παραλληλόγραμμο +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ……………………
3. Έχει τρεις ορθές.
4. Έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

- **ΡΟΜΒΟΣ**

Για να είναι ένα παραλληλόγραμμο ρόμβος πρέπει να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. Είναι παραλληλόγραμμο +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ……………………
2. Είναι παραλληλόγραμμο +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ……………………
3. Είναι παραλληλόγραμμο +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ……………………
4. Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

- **ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**

Για να είναι ένα ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ τετράγωνο πρέπει να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

…ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ…………………+………ΡΟΜΒΟΣ……………………

1. Μία γωνία ορθή +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ………………….
2. Οι διαγώνιοί του ίσες +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ…………………

Οι απέναντι πλευρές παράλληλες
Οι απέναντι πλευρές ίσες
Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
Οι απέναντι γωνίες ίσες .
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

Οι διαγώνιοι είναι ίσες.
Έχει μία ορθή

Οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.
Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του.
Έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

Οι απέναντι πλευρές παράλληλες
Όλες οι πλευρές του ίσες.
Όλες οι γωνίες του είναι 90^o
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται
είναι ίσες.
τέμνονται κάθετα.
διχοτομούν τις γωνίες του.

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΑ-ΚΡΙΤΗΡΙΟ

Έχει δύο πλευρές παράλληλες (Βάση μεγάλη//Βάση μικρή) και δύο μη παράλληλες.

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Οι μη παράλληλες πλευρές ίσες.
2. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες
3. Οι διαγώνιες είναι ίσες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=180^o$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=\widehat{A}=\widehat{B}$
2. Αν ΑΓ=ΒΔ τέμνονται στο Κ τότε ΑΚ=ΒΚ και ΚΓ=ΚΔ.
3. Αν φέρω τα δύο ύψη από τις κορυφές σχηματίζονται δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο.
4. Οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές
5. Οι ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο βάσεων του τραπεζίου είναι κάθετη

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

- ✓ Δύο πλευρές παράλληλες +………ΙΔΙΟΤΗΤΑ………………

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Μία μη παράλληλη κάθετη στις δύο βάσεις .

ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ-ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. ΕΖ//ΑΒ//ΓΔ
2. $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$
3. Τέμνει τις διαγώνιες στα Κ,Λ τα οποία είναι μέσα
4. $ΚΛ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}, ΓΔ > ΑΒ$

ΤΑ ΠΙΟ SOS ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. ***ΘΕΩΡΗΜΑ Ι*** **(ΣΕΛ.104)**

$$\left.\begin{array}{c} \text{ΑΒΓ} \\ \text{Δ μέσο ΑΒ} \\ \text{Ε μέσο ΑΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΔΕ} = // \frac{\text{ΒΓ}}{2}$$

2. ***ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ*** **(ΣΕΛ.104)**

$$\left.\begin{array}{c} \text{ΑΒΓ} \\ \text{Δ μέσο ΑΒ} \\ \text{ΔΕ} // \text{ΒΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Ε } \textit{μέσο} \text{ ΑΓ} \\ \text{ΔΕ} // = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} \end{array}$$

3. ***ΘΕΩΡΗΜΑ Ι*** **(ΣΕΛ.109)**

$$\left.\begin{array}{c} \text{ΑΒΓ} \left(\widehat{\text{Α}} = 90^o\right) \\ \text{ΑΜ διάμεσος της ΒΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΑΜ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$$

4. ***ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ*** **(ΣΕΛ.109)**

$$\left.\begin{array}{c} \text{ΑΜ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} \\ \text{ΑΜ διάμεσος της ΒΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Το } \textit{τρίγωνο} \text{ είναι} \\ \textit{ορθογώνιο} \text{ με } \widehat{\text{Α}} = 90^o \end{array}$$

5. ***ΠΟΡΙΣΜΑ*** **(ΣΕΛ.110)**

$$\left.\begin{array}{c} \text{ΑΒΓ} \left(\widehat{\text{Α}} = 90^{\text{O}}\right) \\ \widehat{\text{Β}} = 30^{\text{O}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΑΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{c} \text{ΑΒΓ} \left(\widehat{\text{Α}} = 90^{\text{O}}\right) \\ \text{ΑΓ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\text{Β}} = 30^{\text{O}}$$

6. ***ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ*** **(ΣΕΛ. 107)**

Όλες οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο συμβολίζεται με Θ και ισχύει για καθεμιά από αυτές. Π.χ Έστω ΑΜ η διάμεσος. Τότε $ΑΘ = \frac{2}{3}\text{ΑΜ}$ και $\text{ΘΜ}=\frac{1}{3}\text{ΑΜ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^o

1. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ=3/2ΑΒ. Αν Ε , Ζ ,Η είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα και η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ , να αποδείξετε τα παρακάτω:
   α. ΑΕ=ΔΘ. **β.** ΗΖ//=ΑΒ .
   γ . Το τετράπλευρο ΑΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο .

2. Δίνεται παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε τις ΑΚ και ΓΛ κάθετες στη διαγώνιο ΒΔ
   Α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.
   Β. Αν Μ το μέσο της πλευράς ΑΔ και Ν το μέσο της πλευράς ΒΓ να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΛΝ.
   Γ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΛΝΓ είναι ίσα.
3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε αυτό προς το μέρος του Δ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ.
   Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
   Β. Αν Μ το μέσο του ΒΕ, να αποδείξετε ότι $ΜΔ = \frac{ΑΒ}{2}$
   Γ. Αν Λ είναι το μέσο του ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΛΔΜΒ είναι ρόμβος.
   Δ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΒΑ είναι τραπέζιο.

4. Δίδεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ= 2ΑΔ =α και Α=2 Δ
   α) Να υπολογιστούν οι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
   β) Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει τη ΑΒ στο σημείο Ε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
   γ) Να δείξετε ότι η γωνία $ΔΕΓ = 90^0$

5. Δίνεται παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε τις ΑΚ και ΓΛ κάθετες στη διαγώνιο ΒΔ
   Α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο
   Β. Αν Μ το μέσο της πλευράς ΑΔ και Ν το μέσο της πλευράς ΒΓ να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΛΝ.
   Γ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΛΝΓ είναι ίσα

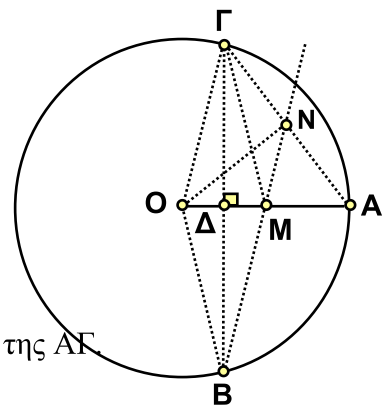
6. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α=Δ=90^o , Γ=60^o , ΑΒ=4 , ΒΓ=8 και ΒΕ το ύψος του.
   Α.Να υπολογίσετε το μήκος του ΕΓ και της διαμέσου ΚΛ του τραπεζίου
   Β.Ν.δ.ο. το ΒΓΔ είναι ισόπλευρο
   Γ.Αν η προέκταση της ΓΒ τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ, ν.δ.ο. το Α είναι μέσον του ΔΖ

7. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε το ΓΕ=ΑΓ.Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Ν το σημείο τομής των ΔΓ και ΒΕ, ν.δ.ο.
   α). Ν μέσο της ΒΕ β) ΓΝ=ΑΒ/2 γ) τρίγ.ΒΓΝ=τρίγ.ΑΒΜ

8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Δ=120^o . Αν η διχοτόμος της Α περνά από το μέσο Ε της ΓΔ , ν.δ.ο.
   α) ΔΓ=2ΑΔ β) η απόσταση του Ε από την ΑΒ είναι ίση με ΑΕ/2

9. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α=Δ=90^o , Β=60^o, ΒΓ=8x , ΓΔ=2x
   Αν ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και Ε , Ζ μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: **Α.** Το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο **Β.** ΕΖ = ΗΒ **Γ.** ΔΚ // ΓΖ

10. Στο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος ,Ρ είναι το μέσο της ΑΜ και ΜΚ // ΑΓ.Να αποδείξετε ότι:
   Α. Τα τρίγωνα ΑΕΡ και ΜΛΡ είναι ίσα
   Β. Το ΑΕΜΛ είναι παραλληλόγραμμο
   Γ. Το Λ είναι βαρύκεντρο στο ΑΒΜ



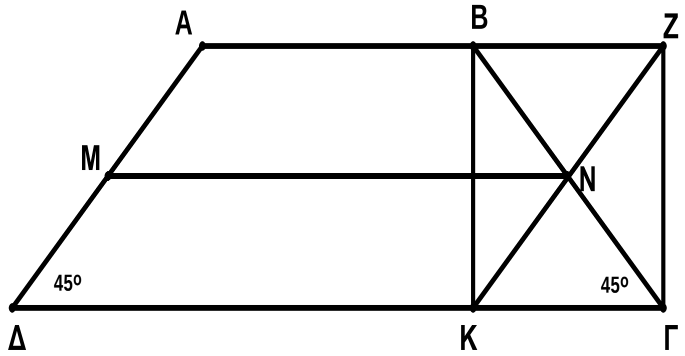
11. Έστω κύκλος με κέντρο Ο , ακτίνα ΟΑ και Μ το μέσο της ΟΑ . Από το μέσο Δ του ΟΜ φέρνουμε την κάθετη στο ΟΜ , η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ Να δείξετε ότι :
   Α. Το τετράπλευρο ΒΟΓΜ είναι ρόμβος
   Β. Η προέκταση του ΒΜ διέρχεται από το μέσο Ν της ΑΓ.
   Γ. Το τρίγωνο ΑΝΟ είναι ορθογώνιο .

12. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ με ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ , την ΔΕ κάθετη στην ΑΒ και τη ΔΖ κάθετη στην ΑΓ . Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τη ΔΖ στο Η να αποδείξετε ότι :
   Α. $B\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$
   Β. τα τρίγωνα ΑΗΖ και ΒΔΕ είναι ίσα .
   Γ. το τετράπλευρο ΒΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο .
   Δ. το τετράπλευρο ΑΒΔΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ . Προεκτείνουμε τη ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΒΔ και έστω Η το σημείο τομής της ΓΔ με την ΑΕ . Αν Ζ το μέσο της ΑΔ και οι ΓΖ και ΑΕτέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:
Α. ΔΗ=ΑΒ/2. **Β.** Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΓΔΖ είναι ίσα . **Γ.** ΓΘ$\perp$ΑΕ .

14. Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο. Κατασκευάζουμε στο εσωτερικό του τετραγώνου το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ. Έστω Λ η προβολή της κορυφής Δ πάνω στην ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα
β) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΕΔΓ.
γ) ΑΒ=2ΔΛ

15. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και με γωνίες Γ και Δ ίσες με 45^o η κάθε μία. Έστω ΜΝ διάμεσος τραπεζίου με το σημείο Μ στην ΑΔ και το Ν στην ΒΓ. Από το Ν φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την ΓΔ στο σημείο Κ και την προέκταση της ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΒΖΓΚ είναι τετράγωνο
β) $KB = \dfrac{ΓΔ - AB}{2}$ γ) ΒΚ+ΜΝ = ΓΔ

16. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ, ΑΒ//ΓΔ με Α=Δ=90^o ΔΓ=2ΑΒ και Β=3Γ. Φέρνουμε τη ΒΕ$\perp$ΔΓ ,που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ , και την ΑΕ , που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:
Γ=45^o ii. ΒΔ=ΑΕ iii. ΛΚ=1/4ΔΓ.

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΓΔ. Στην προέκταση του ΟΜ παίρνουμε το ΜΝ=ΟΜ , όπου Ο το σημείο τομής των διαγωνίων. Ν.δ.ο.
α) ΟΜ=ΑΔ/2 β) το ΔΟΓΝ είναι παραλληλόγραμμο
γ) 2ΚΜ=ΑΚ . όπου Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΔ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ=ΒΖ (Μονάδες 12)

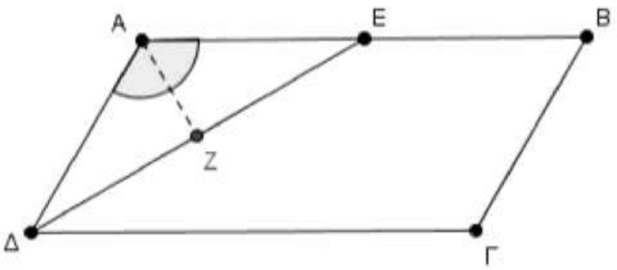
β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$. (μον.10)

β) $AZ = \dfrac{AB}{4}$ (μον.15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ=ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

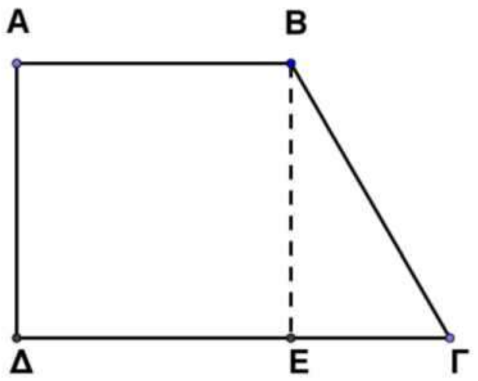
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=ΒΓ=4, $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε 2ΕΓ=ΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)



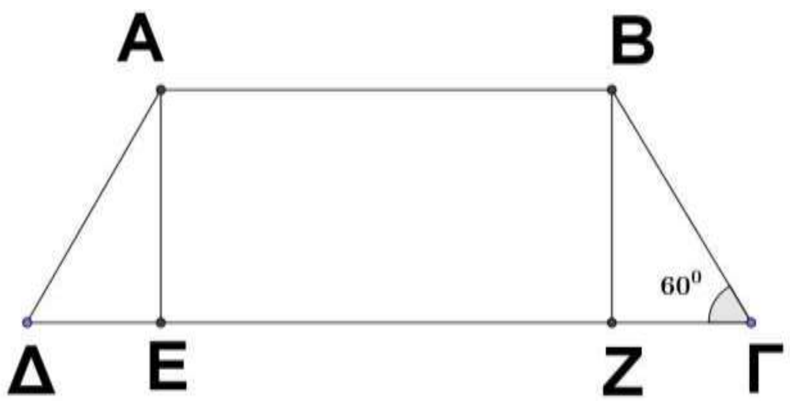
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=6, ΒΓ=4 και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

1. ΙΣΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ-ΙΣΕΣ ΓΩΝΙΕΣ
    - Συγκρίνουμε δύο τρίγωνα τα οποία οι γωνίες ή οι πλευρές είναι στοιχεία του τριγώνου.
    - Κάνουμε πράξεις και με κατάλληλες ισότητες(από τα προηγούμενα ερωτήματα) καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα.
    - Τα συγκρίνουμε με ένα τρίτο βοηθητικό ευθύγραμμο τμήμα.
    - Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των παράλληλων ευθειών.
    - Χρησιμοποιούμε τα ΣΟΣ θεωρήματα.

2. ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ-ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
    - Για να βγάλουμε δύο τρίγωνα ίσα πολλές φορές συγκρίνουμε δύο άλλα πρώτα για να έχουμε επαρκή στοιχεία.
    - Πολλές φορές χρειάζεται να φέρουμε βοηθητική γραμμή που να έχει κάποια ιδιότητα. Σε κύκλο ακτίνα ή απόστημα. Σε τρίγωνο προεκτείνουμε ένα ευθ. τμήμα κατά ίσο τμήμα .Σε ένα τετράπλευρο φέρνουμε τη διαγώνιο.

3. ΤΡΙΓΩΝΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ
    - Δύο πλευρές ίσες
    - Δύο γωνίες ίσες
    - Ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι Διχοτόμος $\Leftrightarrow$ Διάμεσος $\Leftrightarrow$ Ύψος $\Leftrightarrow$ Μεσοκάθετος

4. ΤΡΙΓΩΝΟ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ
    - Όλες οι πλευρές ίσες
    - ‘Ολες οι γωνίες ίσες
    - Ισοσκελές + μία γωνία 60^{o}

5. ΤΡΙΓΩΝΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ-ΚΑΘΕΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
    - Δείχνουμε ότι οι δύο άλλες γωνίες στο τρίγωνο που σχηματίζεται έχουν άθροισμα 90^{o} .
    - Εφαρμόζω το ΘΙΙ σελ109
    - Αποδεικνύουμε ότι είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία
    - Δίερχεται από το ορθόκεντρο.

6. ΜΕΣΟ-ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ
    - Αποδεικνύω ότι ΜΑ=ΜΒ ή χρισμοποιώ το (ΘΙΙ Σελ.104)
    - Αποδεικνύω την ιδιότητα του
    - Αποδεικνύω ότι ανήκει σε ισοσκελές τρίγωνο-ισόπλευρο τρίγωνο και είναι Διχοτόμος $\Leftrightarrow$ Διάμεσος $\Leftrightarrow$ Ύψος
    - Αποδεικνύω ότι διέρχεται από το μέσο και είναι και κάθετη σε αυτό το σημείο

7. ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ
    - Αποδεικνύω την ιδιότητα του
    - Αποδεικνύω ότι ανήκει σε ισοσκελές τρίγωνο-ισόπλευρο τρίγωνο και είναι Διχοτόμος $\Leftrightarrow$ Διάμεσος $\Leftrightarrow$ Ύψος
    - Αποδεικνύω ότι ισχύει για τη γωνία $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{\widehat{O}}{2}$
    - Ότι διέρχεται από το έγκεντρο

8. ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ:
    - Αν δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι **ίσες.**
    - Αν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι **ίσες.**
    - Αν δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι **παραπληρωματικές**.
    - Αν είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.
    - Αν είναι παράλληλές στην ίδια ευθεία.
    - Είναι πλευρές παραλληλογράμμου
    - Ενώνονται δύο μέσα ενός τρίγωνου (ΘΙ. Σελ104)

9. ΠΟΤΕ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ
    - Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180^o τότε τέμνονται προς το μέρος αυτών.

10. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ
    - Στις ανισοτικές σχέσεις πάντα οι γωνίες ή οι πλευρές που συγκρίνω πρέπει να τις μεταφέρω σε ένα τρίγωνο με κατάλληλες ισότητες

11. ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

- Αποδεικνύω ότι η γωνιά που σχηματίζουν με το μεσαίο γράμμα για κορυφή είναι 180^o .
- Αποδεικνύω ότι είναι παράλληλα σε ένα κοινό τμήμα αλλά και με την κοινή κορυφή που έχουν σημαίνει ότι είναι συνευθειακά.

12. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

- Πρέπει να σχηματίσω ένα από τα κριτήρια του τετραπλεύρου που θέλω να αποδείξω.

13. ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΝ

- Αποδεικνύω ότι τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο όμως έχει μία μοναδικότητα Π.χ το μέσο μιας πλευράς ,το κέντρο του κύκλου, το βαρύκεντρο,το ορθόκεντρο.

14. ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ

- Αποδεικνύω ένα από τα τρία κριτήρια

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ - ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

1. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία οξεία γωνία.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
3. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
4. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με 60^o, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
5. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του.
6. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$, *όπου* $\beta\geq\gamma$.
7. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$ είναι $2\cdot A\Gamma = B\Gamma$, τότε $\hat{B}=60^0$.
8. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.
9. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.
10. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.
11. Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος.
12. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
13. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
14. Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες.
15. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές.
16. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, τότε η απέναντι γωνία του είναι 30°.
17. Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία.
18. Κάθε τρίγωνο έχει τουλάχιστον δύο οξείες γωνίες.
19. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών κάθε τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.
20. Ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.
21. Η απόσταση του βαρύκεντρου τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με το 1/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
22. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
23. Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, λέγεται η ευθεία που διέρχεται από το μέσον του τμήματος.

24. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς οποιαδήποτε πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

25. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του.

26. Η διάμεσος χωρίζει ένα τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.

27. Σε κάθε τρίγωνο η μεσοκάθετος μιας πλευράς του είναι και ύψος του τριγώνου.

28. Αν δυο τρίγωνα έχουν μία πλευρά τους ίση και δύο γωνίες τους ίσες τότε είναι ίσα.

29. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία οξεία γωνία.

30. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με 60°, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

31. Δύο τρίγωνα με μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες μία προς μία είναι ίσα.

32. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο οξείες γωνίες τότε είναι οξυγώνιο.

33. Αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσος είναι και ύψος τότε είναι ισόπλευρο.

34. Η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από όλες τις γωνίες του τριγώνου.

35. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.

36. Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του.

37. Το βαρύκεντρο στο αμβλυγώνιο τρίγωνο είναι έξω από το τρίγωνο.

38. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο τα ύψη τέμνονται έξω από το τρίγωνο.

39. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι το μισό της κάθετης πλευράς του.

41. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.

42. Αν δύο κύκλοι με ακτίνες R και ρ αντίστοιχα , τέμνονται ,τότε η διάκεντρος ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους $R + \rho$.

43. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

44. Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μισό της εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

45. Η διάκεντρος δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους.

46. Δύο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εσωτερικά αν $K\Lambda=\rho_1+\rho_2$

47. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

48. Δύο κύκλοι (K, ρ) και (Λ, R) με $K\Lambda = \rho + R$ εφάπτονται εξωτερικά.

49. Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι πάντα μεσοκάθετος της διακέντρου.

50. Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

51. Αν η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου από μια ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του τότε η ευθεία είναι εφαπτόμενη στο κύκλου .

52. Αν τα αποστήματα δύο χορδών ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές αυτές είναι ίσες.

53. Ο περιγεγραμμένος κύκλος σε ένα τρίγωνο εφάπτεται στις πλευρές του.

54. Ο εγγεγραμμένος κύκλος σε ένα τρίγωνο περνά από τις κορυφές του.

55. Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το βαρύκεντρο.

56. Το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου είναι το έγκεντρο.

57. Το τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων ,λέγεται διάμετρος των κύκλων.

58. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

59. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες είναι ίσες.

60. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μία γωνία ορθή, τότε είναι ορθογώνιο.

61. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους κάθετες.

62. Από κάθε σημείο εκτός ευθείας, άγεται μία μόνο κάθετη σε αυτήν.

63. Κάθε τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.

64. Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες παραπληρωματικές .

65. Οι διαγώνιες ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα.

66. Το τετράγωνο είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος.

67. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο.

68. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.

69. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές

70. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα.

71. Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

72. Κάθε ρόμβος που έχει ίσες διαγώνιες είναι τετράγωνο.

73. Αν ένα τετράπλευρο έχει τρεις ορθές γωνίες τότε είναι ορθογώνιο.

74. Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι ίση με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

75. Ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται είναι παραλληλόγραμμο.

76. Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες μεταξύ τους.

77. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους.

78. Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.

79. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

80. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

81. **Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.**

82. **Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.**

83. **Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες ίσες.**

84. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

85. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες το χωρίζουν σε 4 ισοσκελή τρίγωνα.

86. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μία γωνία του ορθή , τότε έχει και ίσες διαγώνιες

87.Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο από 180°

88. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

89. Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.

90. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο .

91. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

92. Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.

93. Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο πλευρές παράλληλες ,είναι παραλληλόγραμμο

94. Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

95. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

96. Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.

97. Ο ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο.

98. Το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο.

99. Το ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο.

100. Τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει τις δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες.

101. Διάμεσος τραπεζίου είναι το τμήμα που συνδέει τα μέσα των βάσεων.

102. Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες είναι πάντα ίσες.

103. Η διαγώνιος του τραπεζίου το χωρίζει σε δύο ίσα τρίγωνα.

104. Σε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορίζει δύο ισοσκελή τρίγωνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ – ΘΕΜΑ $4^{ο}$

ΘΕΜΑ 2787

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου $A\Delta$ στο σημείο E. Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα $\Theta BE, Z\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $A\hat{\Gamma}E + ABE = 180^0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2788

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma (A = 90^0)$ $B = 50^0$, το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E $\Delta\Gamma$, ώστε $\Delta E = B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii) $\Gamma AE = 10^0$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2792

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\Gamma O\Delta = 60^0$ (Μονάδες 9)

ii. οι γωνίες $OA\Gamma, OB\Delta$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$. (Μονάδες 7)